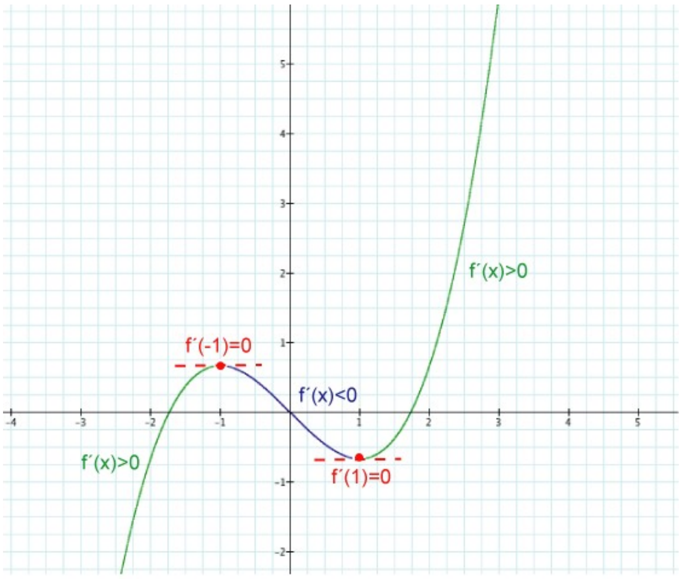
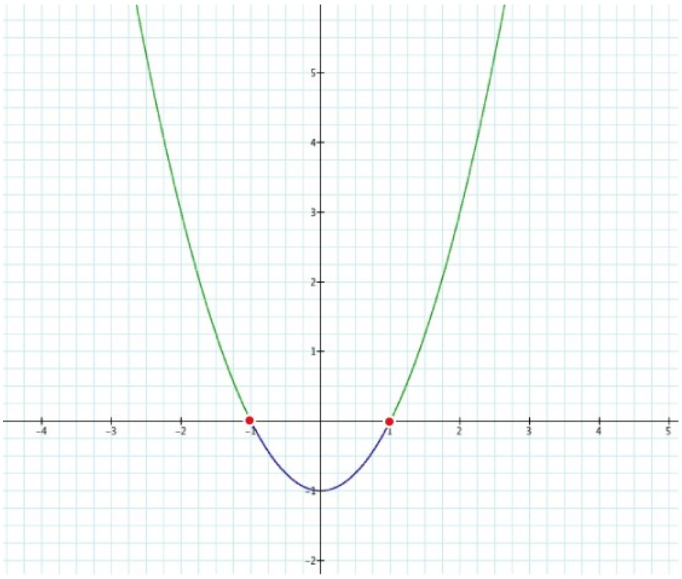
Ableitung und Monotonie

Beispiel: $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - x$ $\qquad f'(x) = x^2 - 1$

Graph von f :



Graph von f´:



Definition von Monotonie:

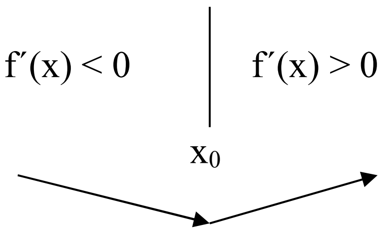
f steigt (fällt) auf $[a;b] \subset D_f$ echt monoton, wenn für $x_1, x_2 \in [a;b]$ gilt:
$x_1 < x_2 \; (x_1 < x_2) \;\Rightarrow\; f(x_1) < f(x_2) \; (f(x_1) > f(x_2))$.

Zusammenhang der Monotonie mit der Ableitung:

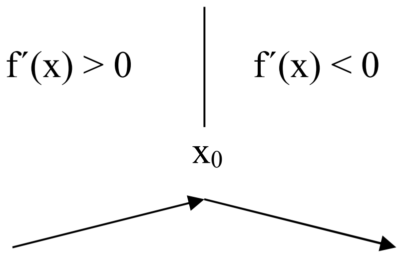
Ist $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) für alle $x \in [a;b]$, dann gilt, dass f echt monoton steigt (echt monoton fällt) in [a;b].
Gilt für ein $x_0 \in D$ $f'(x_0) = 0$, so liegt an dieser Stelle ein Extremum vor.

Bemerkung:

Anhand des Monotonieverhaltens links und rechts einer Stelle x_0 (mit $f'(x_0) = 0$) kann man entscheiden, ob es sich bei der Stelle x_0 um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.



x_0 ist ein Tiefpunkt



x_0 ist ein Hochpunkt

Aufgaben:

1.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

1.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

1.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

2.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2-6x+8$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

2.1 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

2.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

3.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=-x^3+11x^2-24x$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

3.1 Ermitteln Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f.

3.2 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

3.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

4.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^4+6x^3+9x^2$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

4.1 Ermitteln Sie die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f.

4.2 Bestimmen Sie die Art und Koordinaten der Extrempunkte von f.

4.3 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

4.4 Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen G_f im Kurvenpunkt mit der Abszisse 1.

4.5 Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich [-3,5;0,5] in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

5.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=x^3$ mit $D_f=\mathbb{R}$.

5.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrempunkte.

5.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

6.0 Gegeben ist die Funktion $f(x)=\frac{1}{x}$ mit $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

6.1 Untersuchen Sie die Funktion f auf Extrempunkte.

6.2 Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von f.

Lösungen:

1.1 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = x^2 - 1$

$\Rightarrow x^2 - 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = 1 \quad \Rightarrow x_1 = -1 \quad x_2 = 1$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = -1 \;\; HP \qquad x_2 = 1 \;\; TP$

y-Koordinaten:

$f(-1) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow HP(-1/\frac{2}{3}) \qquad f(1) = -\frac{2}{3} \quad \Rightarrow TP(1/-\frac{2}{3})$

1.2 Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton steigend in]-∞;-1] sowie in [1;∞[

G_f ist streng monoton fallend in [-1;1]

2.1 $\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = x^2 + x - 6$

$\Rightarrow x^2 + x - 6 = 0 \quad \Rightarrow (x+3)(x-2) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = 2$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = -3 \;\; HP \qquad x_2 = 2 \;\; TP$

y-Koordinaten:

$f(-3) = 21{,}5 \quad \Rightarrow HP(-3/21{,}5) \qquad f(2) = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow TP(2/\frac{2}{3})$

2.2 Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton steigend in]-∞;-3] sowie in [2;∞[

G_f ist streng monoton fallend in [-3;2]

3.1 Nullstellen: $f(x)=0$

$\Rightarrow -x^3+11x^2-24x=0 \quad \Rightarrow -x(x^2-11x+24)=0 \quad \Rightarrow x_1=0$

$\Rightarrow x^2-11x+24=0 \quad \Rightarrow (x-3)(x-8)=0 \quad \Rightarrow x_2=3 \quad x_3=8$

$\Rightarrow$ f hat drei Nullstellen bei $x_1 = 0$ (einfach), bei $x_2 = 3$ (einfach) und bei $x_3 = 8$ (einfach)

3.2 $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) = -3x^2+22x-24$

$\Rightarrow -3x^2+22x-24=0$

$$\Rightarrow x_{1/2} = \frac{-22 \pm \sqrt{484-4\cdot(-3)\cdot(-24)}}{-6} = \frac{-22\pm\sqrt{196}}{-6} = \frac{-22\pm 14}{-6}$$

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3} \qquad x_2 = 6$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = \dfrac{4}{3}\ TP \qquad x_2 = 6\ HP$

y-Koordinaten:

$f(\frac{4}{3}) = -14\frac{22}{27} \quad \Rightarrow TP(\frac{4}{3}/-14{,}81) \qquad f(6)=36 \quad \Rightarrow HP(6/36)$

3.3 Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton fallend in $]-\infty;\frac{4}{3}]$ sowie in $[6;\infty[$

G_f ist streng monoton steigend in $[\frac{4}{3};6]$

4.1 Nullstellen: $f(x) = 0$

$\Rightarrow x^4 + 6x^3 + 9x^2 = 0 \quad \Rightarrow x^2(x^2 + 6x + 9) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$

$\Rightarrow x^2 + 6x + 9 = 0 \quad \Rightarrow (x + 3)^2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -3$

$\Rightarrow$ f hat zwei Nullstellen bei $x_1 = 0$ (doppelt) und bei $x_2 = -3$ (doppelt)

4.2 $\dfrac{df(x)}{dx} = f'(x) = 4x^3 + 18x^2 + 18x$

$\Rightarrow 4x^3 + 18x^2 + 18x = 0 \quad \Rightarrow 2x(2x^2 + 9x + 9) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 4 \cdot 2 \cdot 9}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-9 \pm 3}{4}$$

$\Rightarrow x_2 = -1{,}5 \qquad x_3 = -3$

Art der Extrema: Skizze von f´

$\Rightarrow x_1 = 0 \;\; TP \qquad x_2 = -1{,}5 \;\; HP \qquad x_3 = -3 \;\; TP$

y-Koordinaten:

$f(0) = 0 \quad \Rightarrow TP(0/0) \qquad f(-1{,}5) = 5{,}0625 \quad \Rightarrow HP(-1{,}5/5{,}0625)$

$f(-3) = 0 \quad \Rightarrow TP(-3/0)$

4.3 Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton fallend in]-∞;-3] sowie in [-1,5;0]

G_f ist streng monoton steigend in [-3;-1,5] sowie in [0;∞[

4.4 Tangente: $y = mx + t$

$m = f'(1) = 4 \cdot 1^3 + 18 \cdot 1^2 + 18 \cdot 1 = 40$

$P(1/y_P)$ einsetzen:

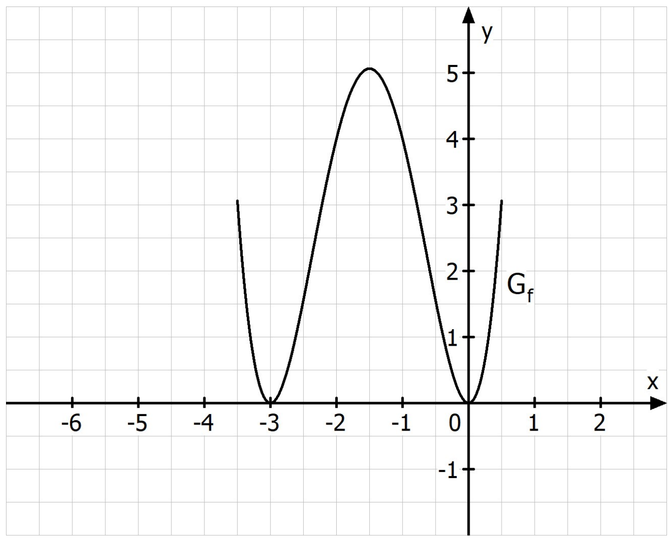
$y_P = f(1) = 1^4 + 6 \cdot 1^3 + 9 \cdot 1^2 = 16 \quad \Rightarrow P(1/16)$

$\Rightarrow 16 = 40 \cdot 1 + t \quad \Rightarrow t = -24$

$\Rightarrow y = 40x - 24$

4.5

x	-3,5	-3	-2	-1	0	0,5
f(x)	3,0625	0	4	4	0	3,0625



5.1 $f'(x) = 3x^2 \quad \Rightarrow 3x^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 0$

Skizze:

$\Rightarrow$ die Funktion f besitzt keine Extrempunkte

5.2 Maximale Monotonieintervalle:

G_f ist streng monoton steigend in]-∞;0] sowie in [0;∞[

G_f ist streng monoton steigend in ganz °

6.1 $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \Rightarrow -\frac{1}{x^2} = 0 \ (f)$

$\Rightarrow$ die Funktion f besitzt keine Extrempunkte

6.2 Maximale Monotonieintervalle:

f' ist für alle x $\in$ ° $\setminus \{0\}$ negativ

G_f ist streng monoton fallend in]-∞;0[sowie in]0;∞[

G_f ist nach Monotoniedefinition aber nicht streng monoton fallend in ° $\setminus \{0\}$,

da nicht überall $x_1 < x_2 \quad \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ gilt.