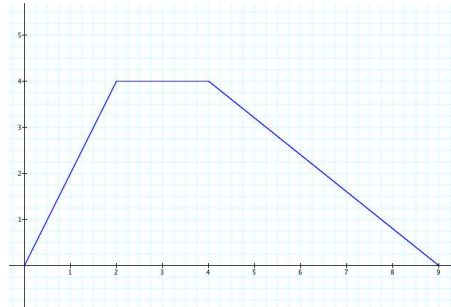


Die abschnittsweise definierte Funktion

Beispiel:

In folgendem Beispiel ist die Geschwindigkeit eines Autos (in m/s) in Abhängigkeit der gefahrenen Zeit t (in Sekunden) dargestellt.



Physikalische Interpretation:

Das Auto beschleunigt konstant aus dem Stand in den ersten zwei Sekunden bis zu einer Geschwindigkeit von 4 m/s. Die nächsten zwei Sekunden fährt das Auto mit konstanter Geschwindigkeit und anschließend bremst das Auto mit konstanter Verzögerung ab bis es nach neun Sekunden zum Stillstand kommt.

Aufstellen der zugehörigen Funktionsgleichung:

$$0 \text{ Sekunden bis 2 Sekunden: } y = mx + t \quad P_1(0/0) \quad P_2(2/4)$$

$$\Rightarrow m = \frac{4-0}{2-0} = 2$$

$$\Rightarrow y = 2x$$

$$2 \text{ Sekunden bis 4 Sekunden: } y = 4$$

$$4 \text{ Sekunden bis 9 Sekunden: } y = mx + t \quad P_3(4/4) \quad P_4(9/0)$$

$$\Rightarrow m = \frac{4-0}{4-9} = -\frac{4}{5} \quad \Rightarrow y = -\frac{4}{5}x + t$$

$$\Rightarrow P_3(4/4) \text{ einsetzen: } 4 = -\frac{4}{5} \cdot 4 + t \quad \Rightarrow t = \frac{36}{5}$$

$$\Rightarrow y = -\frac{4}{5}x + \frac{36}{5}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} 2x & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ 4 & \text{für } 2 \leq x < 4 \\ -\frac{4}{5}x + \frac{36}{5} & \text{für } 4 \leq x \leq 9 \end{cases}$$

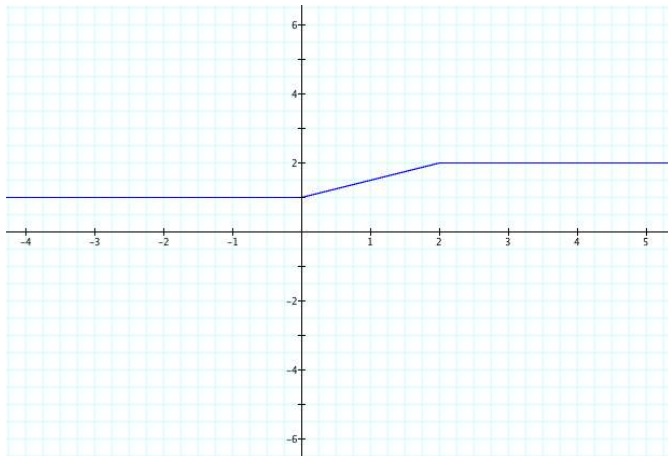
Definition:

Funktionen, die sich aus mehreren Funktionen für bestimmte Definitionsbereiche zusammensetzen, nennt man auch abschnittsweise definierte Funktionen.

Aufgaben:

$$1) f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x < 0 \\ 0,5x + 1 & \text{für } 0 \leq x < 2 \\ 2 & \text{für } x \geq 2 \end{cases}$$

Graph:



Nullstellen von f(x):

1) $1 = 0$ (f) \Rightarrow keine Nullstelle

2) $0,5x + 1 = 0 \Rightarrow (x = -2) \notin D \Rightarrow$ keine Nullstelle

3) $2 = 0$ (f) \Rightarrow keine Nullstelle

\Rightarrow f hat keine Nullstellen

$$2) f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{für } x < 1 \\ -x^2 + 2x & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

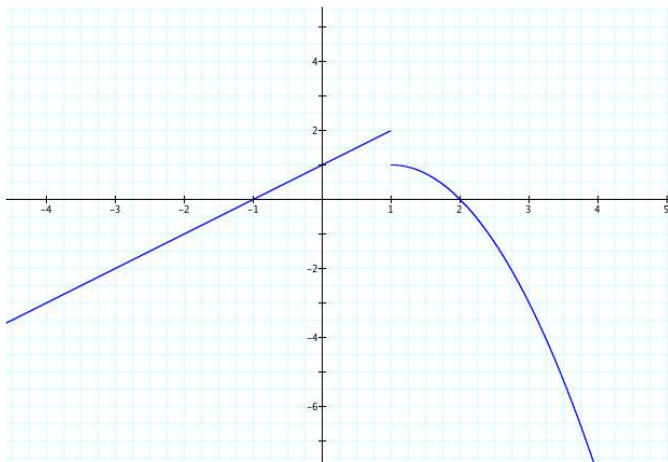
Nullstellen von f(x):

$$1) x+1=0 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$2) -x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(-x+2) = 0 \Rightarrow (x_2 = 0) \notin D \quad x_3 = 2$$

\Rightarrow f hat zwei Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 2$

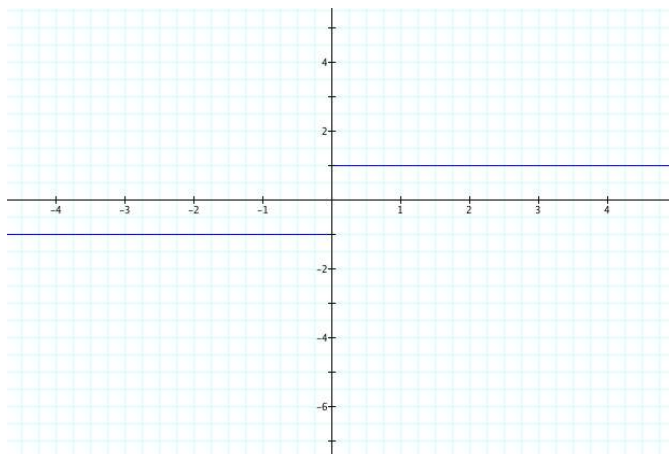
Graph:



3) Signumfunktion (Vorzeichenfunktion)

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ -1 & \text{für } x < 0 \end{cases}$$

Graph:



Weitere Aufgaben:

1. Bestimmen Sie von folgenden Funktionen jeweils die Nullstellen und zeichnen Sie die Graphen der Funktionen in ein kartesisches Koordinatensystem.

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x & \text{für } x < 1 \\ -1 & \text{für } 1 \leq x \leq 3 \\ -(x-3)^2 - 1 & \text{für } x > 3 \end{cases}$$

$$\text{b) } f(x) = \begin{cases} -4 & \text{für } x < -2 \\ -x^2 & \text{für } -2 \leq x \leq 0 \\ -x^2 + 1 & \text{für } 0 < x \leq 2 \\ -3 & \text{für } x > 2 \end{cases}$$

2. Im Internet werden T-Shirts zu einem Preis von 3,80 € angeboten. Bei Bestellung von mindestens 10 Stück gewährt der Händler einen Rabatt von 10%, bei einer Bestellung von mindestens 50 Stück einen Rabatt von 25%.
Stellen Sie die Kosten K der Lieferung in Abhängigkeit der Liefermenge x dar.
3. Eine Telefongesellschaft hat vor einigen Jahren folgenden Tarif angeboten:
In der monatlichen Grundgebühr von 15 € sind bereits 20 Minuten Gesprächsguthaben enthalten. Darüber hinaus betrug der Minutenpreis 0,50 € und es wurde im Minutentakt abgerechnet.
Bestimmen Sie die monatlichen Kosten K (in Euro) in Abhängigkeit der Gesprächsdauer t (in Minuten) und zeichnen Sie den Graphen der Funktion in ein kartesisches Koordinatensystem ein.

Lösungen:

1a) Nullstellen:

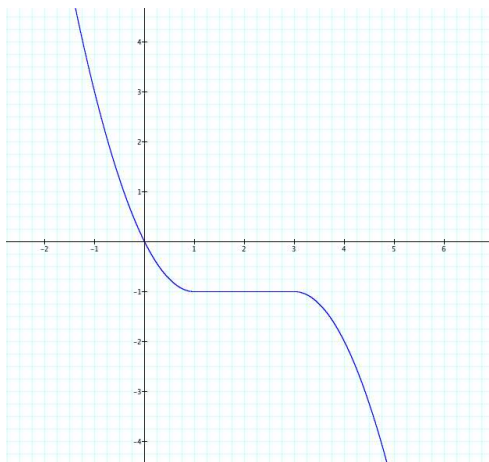
$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x-2) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad (x_2 = 2) \notin D_f$$

$$-1 = 0 \Rightarrow \text{keine Nullstelle}$$

$$-(x-3)^2 - 1 = 0 \Rightarrow (x-3)^2 = -1 \Rightarrow \text{keine Nullstellen}$$

$\Rightarrow f(x)$ hat eine Nullstelle bei $x=0$

Graph:



1b) Nullstellen:

$$-4 = 0 \Rightarrow \text{keine Nullstelle}$$

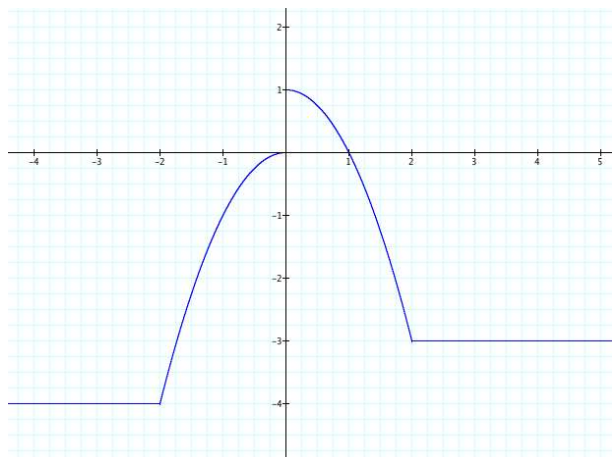
$$-x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$$

$$-x^2 + 1 = 0 \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow (x_1 = -1) \notin D_f \quad x_2 = 1$$

$$-3 = 0 \Rightarrow \text{keine Nullstelle}$$

$\Rightarrow f(x)$ hat zwei Nullstellen bei $x=0$ und $x=1$

Graph:



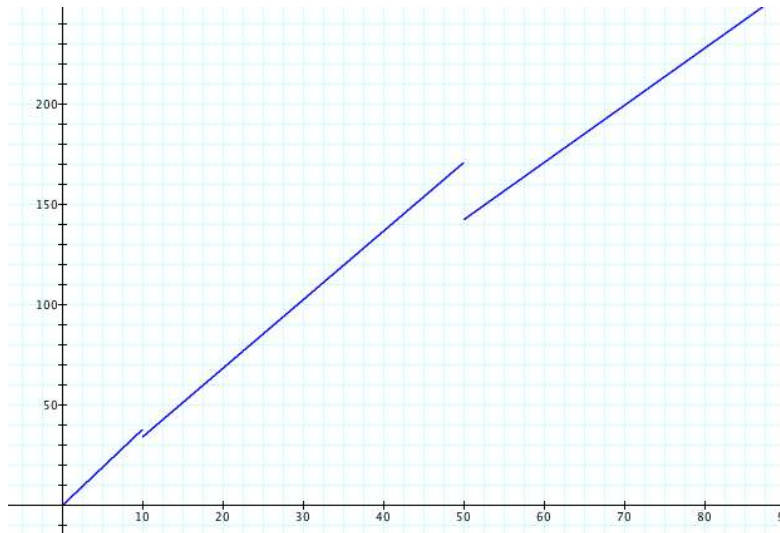
2)

0 bis 10 T-Shirts: 3,80 € pro Stück

10 bis 50 T-Shirts: 3,80 € - 10% = 3,42 € pro Stück

ab 50 T-Shirts: 3,80 € - 25% = 2,85 € pro Stück

$$\Rightarrow K(x) = \begin{cases} 3,80x & \text{für } 0 \leq x < 10 \\ 3,42x & \text{für } 10 \leq x < 50 \\ 2,85x & \text{für } x \geq 50 \end{cases}$$



$$3) K(t) = \begin{cases} 15 & \text{für } 0 \leq t \leq 20 \\ 15 + (t - 20) \cdot 0,5 & \text{für } t > 20 \end{cases}$$

