Absolute Extrempunkte und Randextrempunkte

Beispiel:

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3$ mit $D_f=\mathbb{R}$.
Bestimmen Sie den Globalverlauf von G_f, die Koordinaten der Schnittpunkte mit der x-Achse, die Koordinaten und die Art der Extrempunkte sowie die Koordinaten der Wendepunkte. Geben Sie die Wertemenge an und zeichnen Sie G_f im Bereich $-4{,}5 \le x \le 2$.

Globalverlauf:

$x \to -\infty : f(x) \to +\infty \qquad x \to \infty : f(x) \to +\infty$

Nullstellen:

$\frac{1}{8}x^4+\frac{1}{2}x^3=0 \quad \Rightarrow \frac{1}{8}x^3(x+4)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-4$

Extrempunkte:

$f'(x)=\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2$

$\frac{1}{2}x^3+\frac{3}{2}x^2=0 \quad \frac{1}{2}x^2(x+3)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-3$

Skizze von f´:

$\Rightarrow x_1=0$ kein Extrempunkt $\quad x_2=-3$ TIP $\quad$ TIP$(-3/-3{,}375)$

Wendepunkte:

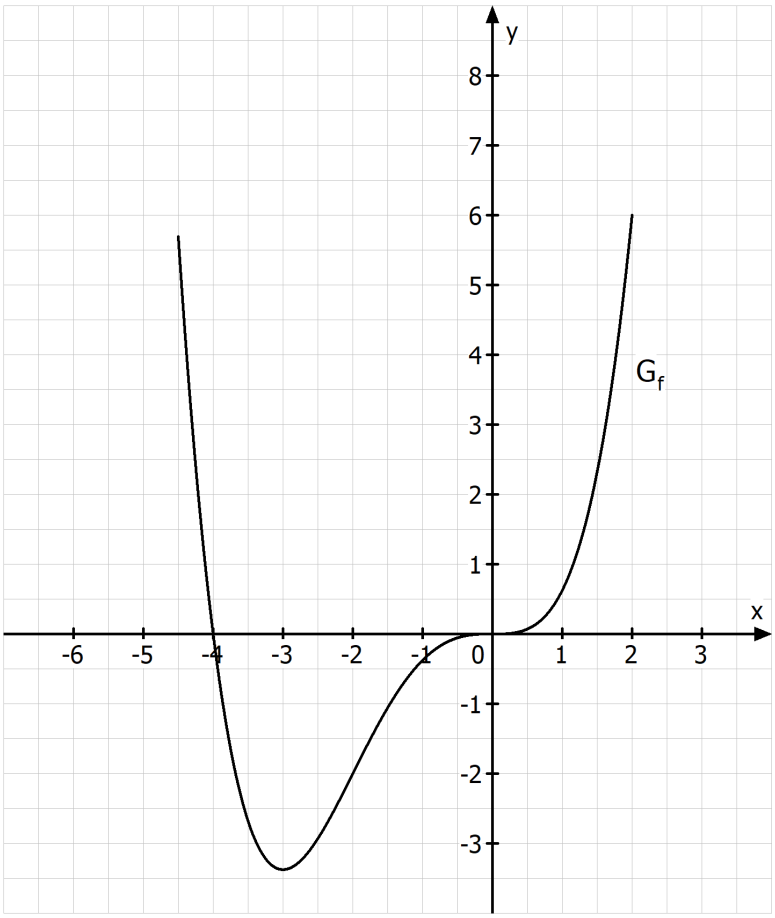
$f''(x)=\frac{3}{2}x^2+3x$

$\frac{3}{2}x^2+3x=0 \quad \Rightarrow \frac{3}{2}x(x+2)=0 \quad \Rightarrow x_1=0 \quad x_2=-2$

Skizze von f´´:

$\Rightarrow x_1=0$ TEP $\quad$ TEP$(0/0) \quad x_2=-2$ WP $\quad$ WP$(-2/-2)$

Wertemenge: $W=[-3{,}375;\infty[$



Der Punkt $P(x_T / f(x_T))$ auf dem Graphen einer Funktion f heißt absoluter Tiefpunkt von G_f, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x_T) \leq f(x)$

Der Punkt $P(x_H / f(x_H))$ auf dem Graphen einer Funktion f heißt absoluter Hochpunkt von G_f, wenn für alle $x \in D_f$ gilt: $f(x_H) \leq f(x)$

Betrachtet wird nun die Funktion f mit $D_f = [-4{,}5; 2]$.

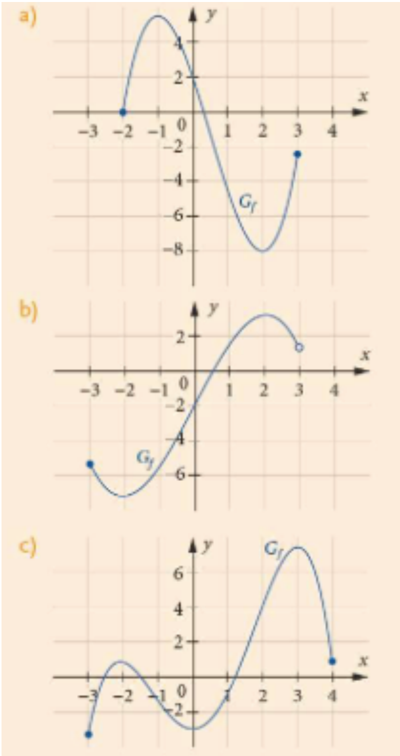
Wir erkennen an der obigen Zeichnung, dass der Graph G_f am linken Rand fällt und am rechten Rand steigt. Daher gibt es zwei Hochpunkte $H_1(-4{,}5/5{,}69)$ und $H_2(2/6)$.

Die Extrempunkte an den Rändern der Definitionsmenge heißen Randextrempunkte.

Ist die Definitionsmenge einer ganzrationalen Funktion f auf ein abgeschlossenes Intervall eingeschränkt, so treten an den Rändern a und b Randextrempunkte des Graphen von f auf.

Aufgaben:

1 Entnehmen Sie dem Graphen G_f die Koordinaten aller Extrempunkte näherungsweise. Geben Sie jeweils an, ob es sich um einen Hoch- oder Tiefpunkt, einen lokalen oder absoluten Extrempunkt oder einen Randextrempunkt handelt (ohne Hilfsmittel).



2.0 Entscheiden Sie, welche Aussagen über den Graphen G_f der Funktion f wahr sind (ohne Hilfsmittel).

2.1 Der Graph von f mit $f(x) = x^2 - 6x + 5$ und Definitionsmenge $D_f = [1;5]$ hat die Wertemenge $W_f = [-4;0]$ und bei x = 3 einen absoluten Tiefpunkt.

2.2 Der Graph von f mit $f(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 5x + 2$ und Definitionsmenge $D_f = [-3;5]$ ist streng monoton steigend und hat zwei Randextrempunkte.

2.3 Der Graph von f mit $f(x) = x^4 - 2x^2 + 1$ und $D_f = \mathbb{R}$ ist symmetrisch zur y-Achse, hat zwei absolute Extrempunkte und die Wertemenge $W_f = [1;\infty[$.

2.4 Der Graph von f mit der Definitionsmenge $D_f = [0;4]$ und Ableitungsfunktion f' mit $f'(x) = -3x^2 + 12x$ hat einen Wendepunkt bei x = 2, den absoluten Tiefpunkt bei x = 0 und den absoluten Hochpunkt bei x = 4.

<u>Lösungen:</u>

1a) Extrempunkte: Randtiefpunkt T_1(-2/0), absoluter Hochpunkt H_1(-1/5,5), absoluter Tiefpunkt T_2(2/-8), Randhochpunkt H_2(3/-2,5)

1b) Extrempunkte: Randhochpunkt H_1(-3/-5), absoluter Tiefpunkt T(-2/-7), absoluter Hochpunkt H_2(2/3)

1c) Extrempunkte: absoluter Randtiefpunkt T_1(-3/-3,75), relativer Hochpunkt H_1(-2,2/1), relativer Tiefpunkt T_2(0/-3), absoluter Hochpunkt H_2(3/7), Randtiefpunkt T_3(4/0,8)

2.1

Aussage ist richtig.

$f(x) = x^2 - 6x + 5 = (x-5)(x-1)$

Scheitel: $x_S = -\frac{-6}{2} = 3 \quad y_S = 3^2 - 6 \cdot 3 + 5 = 4$

Nullstellen: $x_1 = 1 \quad x_2 = 5$

2.2

Aussage ist richtig.

$f'(x) = x^2 + 4x + 5 \quad \Rightarrow x^2 + 4x + 5 = 0 \text{ (f)}$ keine Nullstellen

Skizze von f´:

$\Rightarrow G_f$ ist sms in $[-3;5]$ und an den Rändern treten Randextrempunkte auf.

2.3

Aussage ist falsch.

G_f ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur geradzahlige Exponenten auftreten.

$f'(x) = 4x^3 - 4x \quad 4x^3 - 4x = 0 \quad \Rightarrow 4x(x^2-1) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 1$

Skizze von f´:

$\Rightarrow x_1 = 0$ HOP HOP(0/1)

$x_2 = -1$ TIP TIP(−1/0)

$x_3 = 1$ TIP TIP(1/0)

$\Rightarrow$ absolute Tiefpunkte bei $x = \pm 1$

$\Rightarrow$ Wertemenge $W = [0;\infty[$

2.4

Aussage ist richtig.

$f'(x) = -3x^2 + 12x \quad -3x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow -3x(x-4) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = 4$

Skizze von f´:

$\Rightarrow G_f$ in $[0;4]$ sms

$\Rightarrow x_1 = 0$ absoluter Tiefpunkt $\quad x_2 = 4$ absoluter Hochpunkt

$f''(x) = -6x + 12 \quad -6x + 12 = 0 \quad \Rightarrow x = 2$

Skizze von f´´:

$\Rightarrow x = 2$ WP