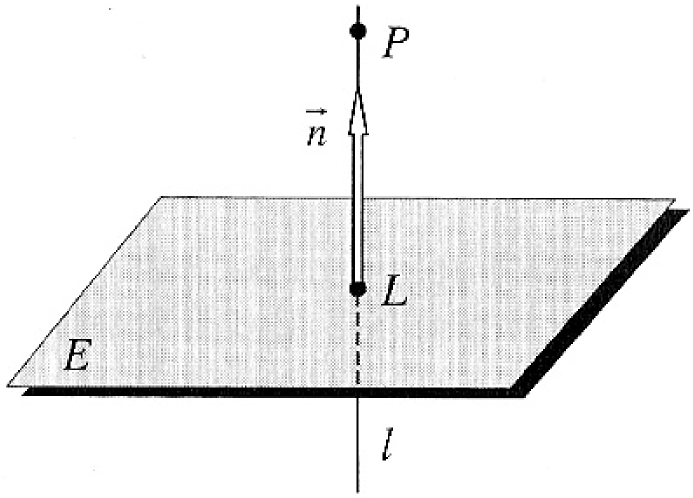
Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Ebene E

1) Lotfußpunktmethode



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Ebene E:

a) Aufstellen einer Geraden l, die senkrecht auf der Ebene E steht und den Punkt P enthält (der Normalenvektor der Ebene E ist damit der Richtungsvektor der gesuchten Geraden l und der Aufhängepunkt der Geraden l ist P).

b) Schnittpunkt L der Geraden l mit der Ebene E berechnen (L nennt man Lotfußpunkt).

c) Der Abstand des Punktes P zur Ebene E ist dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{LP}$.

2) Abstandsformel

Der Abstand eines Punktes P von einer Ebene E kann auch mit Hilfe der folgenden Abstandsformel berechnet werden:

$$d(P;E)=\left|\frac{n_1x_1+n_2x_2+n_3x_3-n_0}{\sqrt{n_1^{\,2}+n_2^{\,2}+n_3^{\,2}}}\right|$$

Hinweis:

Das konstante Glied n_0 muss unbedingt negativ sein. Gegebenenfalls muss die Normalenform der Ebene E mit (-1) multipliziert werden.

Beispiel: $E: 5x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 13 = 0 \qquad P(3/2/7)$

Bestimme Gerade l durch P(3/2/7), die auf E senkrecht steht: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$

$g \cap E = \{F\} \quad \Rightarrow 5(3+5s) - 3(2-3s) + 4(7+4s) + 13 = 0 \quad \Rightarrow s = -1$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

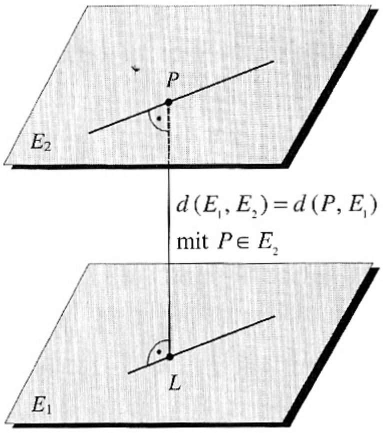
$$\Rightarrow d(P;E) = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \left| \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{50}$$

Alternative:

$E: -5x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 13 = 0$ (das konstante Glied muss negativ sein !!)

$$d(P;E) = \left| \frac{-5 \cdot 3 + 3 \cdot 2 - 4 \cdot 7 - 13}{\sqrt{(-5)^2 + 3^2 + (-4)^2}} \right| = \left| \frac{-50}{\sqrt{50}} \right| = \frac{50}{\sqrt{50}} = \sqrt{50}$$

Berechnung des Abstandes zweier paralleler Ebenen



Die Berechnung des Abstandes zweier paralleler Ebenen kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Ebene zurückgeführt werden. Der Abstand zweier paralleler Ebenen E_1 und E_2 ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Ebene E_2 von der Ebene E_1: $d(E_1;E_2) = d(P;E_1)$.

Aufgaben:

1) $E_1: 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 5 = 0 \qquad E_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

2) $E_1: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 16 = 0 \qquad E_2: 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 24 = 0$

<u>Lösungen zu den Aufgaben:</u>

1)

$$\overrightarrow{n_{E_2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_{E_1}} = (-1) \cdot \overrightarrow{n_{E_2}}$ $\Rightarrow$ Die Ebenen E_1 und E_2 sind echt parallel oder identisch

Aufhängepunkt von E_2 liegt nicht in E_1 $\Rightarrow E_1$ und E_2 sind echt parallel

$d(E_1;E_2) = d(A;E_1)$ mit A(0/0/4)

Gerade l durch A, die senkrecht auf E_1 steht: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$l \cap E_1 = \{F\} \Rightarrow 2 \cdot 2s + 2 \cdot 2s + 4 + s + 5 = 0 \quad \Rightarrow s = -1$

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow d(E_1;E_2) = \left|\overrightarrow{FA}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = 3$$

2)

$\overrightarrow{n_{E_1}} = \overrightarrow{n_{E_2}}$ und n_0 verschieden $\Rightarrow E_1$ und E_2 echt parallel

Bestimme Punkt $P \in E_1$: $x_1 = 0 \quad x_3 = 0 \quad \Rightarrow -4x_2 - 16 = 0 \Rightarrow x_2 = -4$

$\Rightarrow P(0/-4/0)$

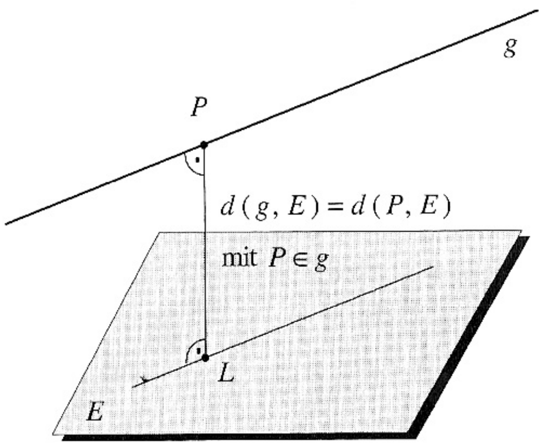
Bestimme Gerade l durch P, die senkrecht auf der Ebene E_2 steht: $l: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$l \cap E_2 = \{F\} \Rightarrow 3 \cdot 3s - 4(-4 - 4s) + 5 \cdot 5s - 24 = 0 \quad \Rightarrow s = \frac{4}{25}$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{4}{25} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{12}{25} \\ \frac{-116}{25} \\ \frac{20}{25} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(E_1;E_2) = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\begin{pmatrix} -\frac{12}{25} \\ \frac{16}{25} \\ -\frac{20}{25} \end{pmatrix}\right| = \frac{4}{5}\sqrt{2}$$

Berechnung des Abstandes einer Geraden von einer parallelen Ebene



Auch die Berechnung des Abstandes einer Geraden g von einer parallelen Ebene E kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Ebene zurückgeführt werden. Der Abstand einer Geraden g von einer parallelen Ebene E ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden g von der Ebene E:
$d(g;E) = d(P;E)$.

Aufgaben:

1) Bestimmen Sie den Abstand der Ebene $E: -x_1 + 4x_2 + 2x_3 - 8 = 0$ und der zu E parallelen Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

2) Prüfen Sie, ob es Parameter $a, b \in \mathbb{R}$ gibt, dass die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} a \\ b \\ 0 \end{pmatrix}$ und die Ebene $E: x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 9 = 0$ parallel sind und den Abstand 1 besitzen.

Lösungen zu den Aufgaben:

1)

Bestimme Gerade l durch P(5/-3/2), die senkrecht auf E steht: $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

$$l\cap E=\{F\}\ \Rightarrow -(5-s)+4(-3+4s)+2(2+2s)-8=0\quad\Rightarrow s=1$$

$$\Rightarrow\vec{f}=\begin{pmatrix}5\\-3\\2\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g;E)=\left|\overrightarrow{FP}\right|=\left|\begin{pmatrix}1\\-4\\-2\end{pmatrix}\right|=\sqrt{21}$$

2)

$$\overrightarrow{n_E}\cdot\overrightarrow{r_g}=\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a\\b\\0\end{pmatrix}=a+2b\qquad\Rightarrow a+2b=0$$

Gerade l durch P(a/1/0) bestimmen, die auf E senkrecht steht: $l:\vec{x}=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}+\mathrm{s}\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}$

$$l\cap E=\{F\}\quad\Rightarrow \text{a+s+2(1+2s)-2(-2s)-9=0}\quad\Rightarrow \text{s}=\frac{7-\text{a}}{9}$$

$$\vec{f}=\begin{pmatrix}a\\1\\0\end{pmatrix}+\frac{7-\text{a}}{9}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\qquad\Rightarrow d(g;E)=\left|\overrightarrow{FP}\right|=\left|\frac{7-\text{a}}{9}\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}\right|=$$

$$\sqrt{\frac{49-14a+a^2}{81}+\frac{196-56a+4a^2}{81}+\frac{196-56a+4a^2}{81}}=\sqrt{\frac{9a^2-126a+441}{81}}$$

$$\Rightarrow\sqrt{\frac{9a^2-126a+441}{81}}=1\ \Rightarrow\frac{9a^2-126a+441}{81}=1$$

$$\Rightarrow 9a^2-126a+441=81\ \Rightarrow 9a^2-126a+360=0$$

$$a_{1/2}=\frac{126\pm\sqrt{126^2-4\cdot9\cdot360}}{18}=\frac{126\pm54}{18}$$

$$\Rightarrow a_1=10\quad\Rightarrow b_1=-5$$

$$\Rightarrow a_2=4\quad\Rightarrow b_2=-2$$