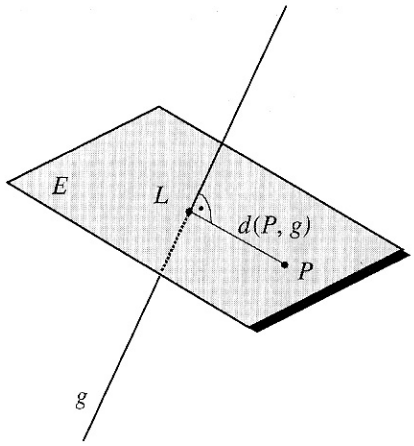
Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Gerade g:

a) Aufstellen einer Hilfsebene E, die senkrecht auf der Geraden g steht und den Punkt P enthält (der Richtungsvektor der Geraden g ist damit der Normalenvektor der gesuchten Ebene E).

b) Schnittpunkt L der Geraden g mit der Ebene E berechnen.

c) Der Abstand des Punktes P zur Geraden g ist dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{LP}$.

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad Q(5/3/6)$

Bestimme Hilfsebene E, die auf g senkrecht steht und Q enthält.

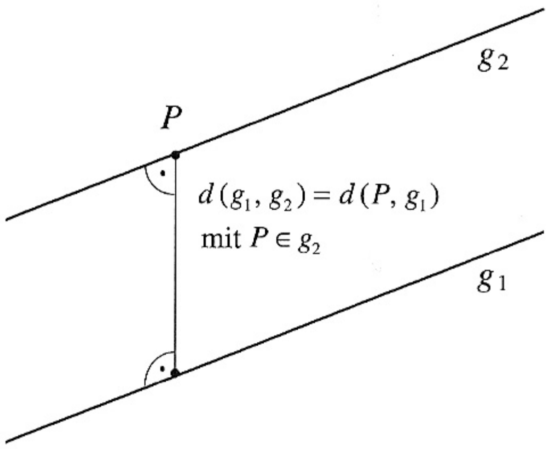
$$E: \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow E: 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - 5 = 0$$

$$g \cap E = \{F\} \quad \Rightarrow 4(2+4t) + 3(10+3t) - 4(-2-4t) - 5 = 0 \quad \Rightarrow t = -1$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(Q;g) = \left|\overrightarrow{FQ}\right| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \right| = 9$$

Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden im Raum



Die Berechnung des Abstandes zweier paralleler Geraden kann auf den Fall Abstand eines Punktes von einer Geraden zurückgeführt werden. Der Abstand zweier paralleler Geraden g_1 und g_2 ist der Abstand eines beliebigen Punktes P der Geraden g_2 von der Geraden g_1: $d(g_1; g_2) = d(P; g_1)$.

Beispiel: $g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Die Richtungsvektoren von g_1 und g_2 sind linear abhängig $\Rightarrow g_1 // g_2$

Bestimme Hilfsebene E, die auf g_1 senkrecht steht und $P(1/0/1) \in g_2$ enthält.

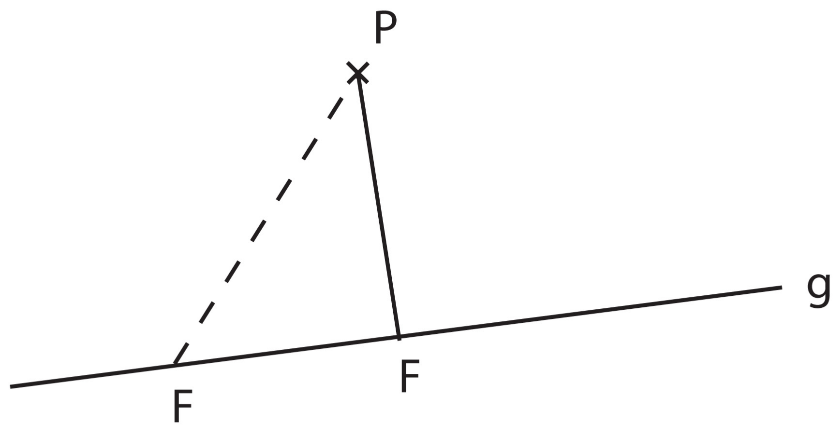
$$E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad \Rightarrow E: 2x_1 - x_2 - x_3 - 1 = 0$$

$$g_1 \cap E = \{F\} \quad \Rightarrow 2(2+2s) - (1-s) - (2-s) - 1 = 0 \quad \Rightarrow s = 0$$

$$\Rightarrow \vec{f} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow d(g_1; g_2) = \left| \overrightarrow{FP} \right| = \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{3}$$

Alternative Möglichkeit zur Berechnung des Abstandes eines Punktes P von einer Geraden g im Raum



Vorgehen zur Bestimmung des Abstandes des Punktes P von der Geraden g:

a) Den allgemeinen Vektor $\vec{d} = \overrightarrow{FP}$ aufstellen, der gebildet wird von einem beliebigen Punkt $F \in g$ und dem gegebenen Punkt P.

b) Den Vektor $\overrightarrow{FP}$ so bestimmen, dass $\overrightarrow{FP}$ senkrecht auf dem Richtungsvektor der Geraden g steht, d.h. $\overrightarrow{FP} \circ \vec{r_g} = 0$.

c) Der Abstand des Punktes P zur Geraden g ist dann die Länge des Vektors $\overrightarrow{FP}$.

Beispiel: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad P(5/3/6)$

$$\vec{d} = \overrightarrow{FP} = \vec{p} - \vec{f} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2+4t \\ 10+3t \\ -2-4t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-4t \\ -7-3t \\ 8+4t \end{pmatrix}$$

$$\vec{d} \circ \vec{r_g} = 0 \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 3-4t \\ -7-3t \\ 8+4t \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \quad \Rightarrow 4(3-4t)+3(-7-3t)-4(8+4t)=0 \quad \Rightarrow t=-1$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{FP} = \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow d(P;g) = \left|\overrightarrow{FP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}\right| = 9$$