

Achsenabschnittsgleichung einer Ebene

Beispiel:

$$E : 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 6 = 0$$

$$E : 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 6$$

$$E : \frac{1}{3}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 1$$

$$\Rightarrow E : \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{2} + \frac{x_3}{2} = 1$$

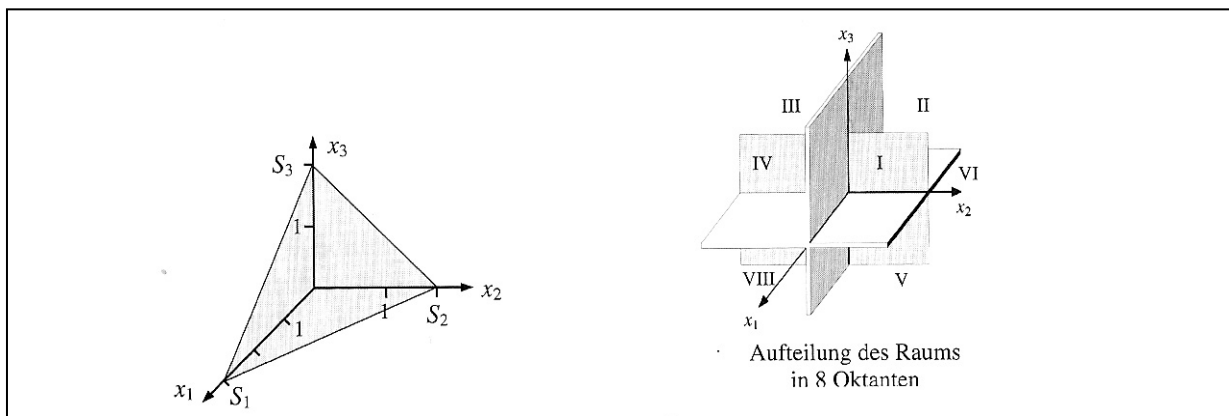
Der Vorteil dieser Gleichung besteht darin, dass man aus ihr die Schnittpunkte mit den Achsen (Spurpunkte) unmittelbar ablesen kann:

Für $x_2 = 0$ und $x_3 = 0$ ergibt sich $x_1 = 3$ und damit $S_1(3/0/0)$

Für $x_1 = 0$ und $x_3 = 0$ ergibt sich $x_2 = 2$ und damit $S_2(0/2/0)$

Für $x_1 = 0$ und $x_2 = 0$ ergibt sich $x_3 = 2$ und damit $S_3(0/0/2)$

Kennt man die Spurpunkte einer Ebene mit den Koordinatenachsen, so lässt sich ihre Lage sehr anschaulich durch den in einem Oktanten des Koordinatensystems liegenden Teil darstellen.



Definition:

Sind in einer Ebene mit der Koordinatengleichung $ax_1 + bx_2 + cx_3 - d = 0$ alle Koeffizienten a, b, c und d verschieden von Null, so lässt sich diese Gleichung umwandeln in die Form:

$$\frac{x_1}{u} + \frac{x_2}{v} + \frac{x_3}{w} = 1 \quad (\text{Achsenabschnittsgleichung})$$

Aus der Achsenabschnittsgleichung lassen sich unmittelbar die Spurpunkte $S_1(u/0/0)$, $S_2(0/v/0)$ und $S_3(0/0/w)$ mit den Koordinatenachsen ablesen.

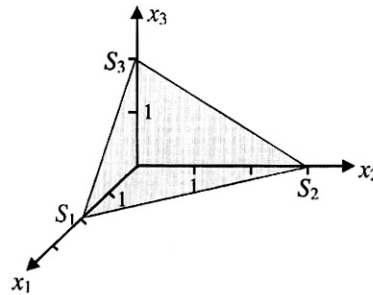
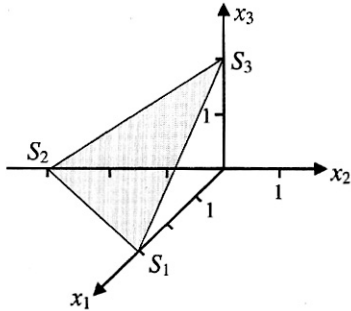
Bemerkung:

Die Verbindungsgerade zweier Spurpunkte bezeichnet man als Spurgerade der Ebene mit der entsprechenden Koordinatenebene.

Tritt in der Koordinatengleichung einer Ebene eine Variable nicht auf, so lässt sich auch eine Achsenabschnittsgleichung angeben.

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie jeweils eine Koordinatengleichung der Ebene E.



2.0 Gegeben ist die Ebene E mit der Gleichung $E : 3x_1 - 6x_2 + 4x_3 - 12 = 0$.

2.1 Ermitteln Sie die Spurpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen.

2.2 Berechnen Sie jeweils eine Gleichung der Spurgerade der Ebene.

2.3 Zeichnen Sie mithilfe der Spurpunkte ein Bild der Ebene.

3.0 Die Punkte $A(2/1/1)$, $B(1/2/1)$ und $C(2/-1/2)$ legen eine Ebene fest.

3.1 Ermitteln Sie eine Koordinatengleichung der Ebene.

3.2 Bestimmen Sie die Spurpunkte der Ebene mit den Koordinatenachsen.

3.3 Geben Sie für jede Spurgerade der Ebene eine Parametergleichung an.

3.4 Zeichnen Sie mithilfe der Spurpunkte ein Bild der Ebene.

4. Berechnen Sie die Spurpunkte S_1 , S_2 und S_3 mit den Koordinatenachsen.

a) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) $E : 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 30$

d) $E : 5x_1 - 7x_2 = -70$

Lösungen:

1a)

$$S_1(3/0/0); S_2(0/-3/0); S_3(0/0/2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{3} + \frac{x_2}{-3} + \frac{x_3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$$

1b)

$$S_1(2/0/0); S_2(0/3/0); S_3(0/0/2)$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{3} + \frac{x_3}{2} = 1$$

$$\Rightarrow 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 6 = 0$$

2.1

$$\text{Achsenabschnittsgleichung: } \frac{x_1}{4} + \frac{x_2}{-2} + \frac{x_3}{3} = 1$$

$$\text{Spurpunkte: } S_1(4/0/0), S_2(0/-2/0), S_3(0/0/3)$$

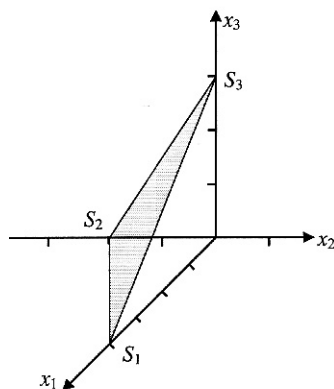
2.2

$$\text{Spurgerade mit der } x_1\text{-}x_2\text{-Ebene durch } S_1 \text{ und } S_2 : s_{12} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade mit der } x_1\text{-}x_3\text{-Ebene durch } S_1 \text{ und } S_3 : s_{13} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade mit der } x_2\text{-}x_3\text{-Ebene durch } S_2 \text{ und } S_3 : s_{23} : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

2.3



3.1

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad -\lambda = x_1 - 2 \quad \Rightarrow \lambda = -x_1 + 2$$

$$(II) \quad \lambda - 2\mu = x_2 - 1$$

$$(III) \quad \mu = x_3 - 1$$

$$\lambda \text{ und } \mu \text{ in (II): } -x_1 + 2 - 2(x_3 - 1) = x_2 - 1 \quad \Rightarrow -x_1 - x_2 - 2x_3 + 5 = 0$$

$$\Rightarrow E: x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 = 0$$

3.2

$$\text{Achsenabschnittsgleichung: } \frac{x_1}{5} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{2,5} = 1$$

$$\text{Spurpunkte: } S_1(5/0/0), S_2(0/5/0), S_3(0/0/2,5)$$

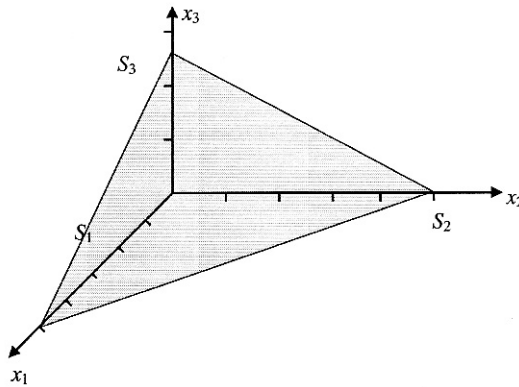
3.3

$$\text{Spurgerade mit der } x_1-x_2\text{-Ebene durch } S_1 \text{ und } S_2: s_{12}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade mit der } x_1-x_3\text{-Ebene durch } S_1 \text{ und } S_3: s_{13}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

$$\text{Spurgerade mit der } x_2-x_3\text{-Ebene durch } S_2 \text{ und } S_3: s_{23}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ -2,5 \end{pmatrix}$$

3.4



4a)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$(I) \lambda + \mu = x_1 - 4$$

$$(II) \lambda = x_2 - 6$$

$$(III) \lambda + 3\mu = x_3$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 - 4 \\ 1 & 0 & x_2 - 6 \\ 1 & 3 & x_3 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 - 4 \\ 0 & -1 & -x_1 + x_2 - 2 \\ 0 & 2 & -x_1 + x_3 + 4 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & x_1 - 4 \\ 0 & -1 & -x_1 + x_2 - 2 \\ 0 & 0 & 3x_1 - 2x_2 - x_3 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow E: 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$$

$$\Rightarrow S_1(0/0/0), S_2(0/0/0), S_3(0/0/0)$$

4b)

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ -6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(I) 2\mu = x_1 \quad \Rightarrow \mu = \frac{1}{2}x_1$$

$$(II) 10\lambda = x_2 - 5 \quad \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{2}$$

$$(III) -6\lambda - \mu = x_3$$

$$(III) \Rightarrow -6\left(\frac{1}{10}x_2 - \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}x_1 = x_3 \quad \Rightarrow -\frac{1}{2}x_1 - \frac{3}{5}x_2 - x_3 + 3 = 0$$

$$\Rightarrow E: 5x_1 + 6x_2 + 10x_3 - 30 = 0$$

$$\Rightarrow \frac{x_1}{6} + \frac{x_2}{5} + \frac{x_3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow S_1(6/0/0), S_2(0/5/0), S_3(0/0/3)$$

4c)

$$\frac{x_1}{15} + \frac{x_2}{-10} + \frac{x_3}{6} = 1$$

$$\Rightarrow S_1(15/0/0), S_2(0/-10/0), S_3(0/0/6)$$

4d)

$$\frac{x_1}{-14} + \frac{x_2}{10} = 1$$

$$\Rightarrow S_1(-14/0/0), S_2(0/10/0), S_3 \text{ existiert nicht}$$