

## Änderungsrate und stärkstes Wachstum

Beispiel:

Gegeben ist die reelle Funktion  $f$  mit  $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 3x^2 - 5x$  und  $D_f = \mathbb{R}$ .

Bestimmen Sie die Stelle mit der stärksten Zunahme der Funktionswerte und zeichnen Sie den Graphen von  $f$ .

$$f'(x) = -x^2 + 6x - 5$$

$$-x^2 + 6x - 5 = 0 \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = 5$$

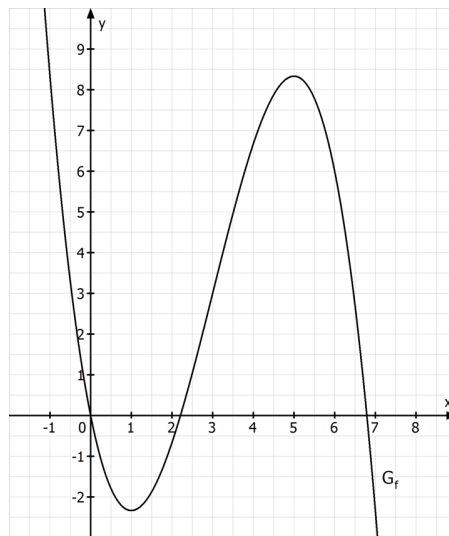
Skizze von  $f'$ :

$$f''(x) = -2x + 6 \quad -2x + 6 = 0 \Rightarrow x = 3$$

$\Rightarrow G_{f'}$  ist im Bereich  $[1;5]$  sms

$\Rightarrow G_{f'}$  hat bei  $x = 3$  das absolute Maximum

$\Rightarrow x = 3$  ist die Stelle, an der  $G_{f'}$  die stärkste Zunahme aufweist



Bei einer ganzrationalen Funktion  $f$  mit  $D_f = \mathbb{R}$  geben die Funktionswerte  $f'(x)$  der ersten Ableitung die lokale Änderungsrate der Funktionswerte  $f(x)$  an.

Die Stellen lokal stärkster Zunahme bzw. Abnahme der Funktionswerte  $f(x)$  ermittelt man mithilfe der Extremstellen der ersten Ableitung. Also kommen hier die Wendestellen von  $f$  infrage.

Bei einer Maximalstelle  $x_0$  von  $f'$  mit  $f'(x_0) > 0$  liegt eine Stelle lokal stärkster Zunahme von  $f$  vor.

Bei einer Minimalstelle  $x_0$  von  $f'$  mit  $f'(x_0) < 0$  liegt eine Stelle lokal stärkster Abnahme von  $f$  vor.

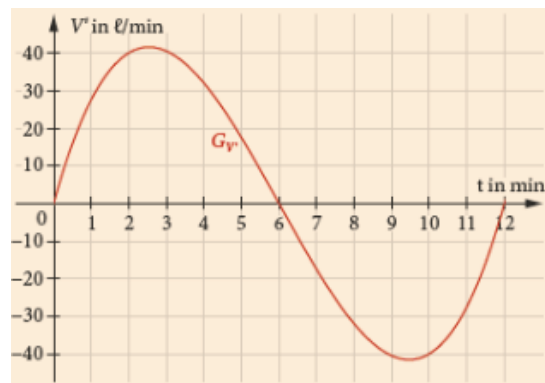
### Aufgaben:

1.0 Für den Jahresbericht einer Firma, die T-Shirts vertreibt, soll die Entwicklung der Umsatzzahlen untersucht werden. Der Absatz zwischen Anfang März und Anfang September des vergangenen Jahres lässt sich durch die Funktion A mit der Gleichung  $A(t) = \frac{1}{9}t^3 - \frac{7}{3}t^2 + 15t - 27$  und der Definitionsmenge  $D_A = [3;9]$  beschreiben.  
Der Absatz  $A(t)$  zum Zeitpunkt  $t$  wird in ME angegeben, wobei eine ME für 100000 T-Shirts steht und  $t$  für Monate.

1.1 Ermitteln Sie den Zeitraum der Absatzabnahme.

1.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt der stärksten Abnahme.

2.0 Die Funktion V gibt modellhaft das Volumen des Wassers in einem Wasserbehälter in Litern an. Durch Zufluss und Abfluss ändert sich das Volumen laufend. Das Diagramm zeigt die Änderungsrate  $V'(t)$  im Zeitraum von 0 bis 12 Minuten (ohne Hilfsmittel).



2.1 Bestimmen Sie näherungsweise die Koordinaten der Punkte  $V'(0)$ ,  $V'(1,5)$ ,  $V'(6)$ ,  $V'(9,5)$  und  $V'(12)$ .

2.2 Interpretieren Sie den Verlauf der Kurve und die Koordinaten der Punkte im Sachzusammenhang.

2.3 Geben Sie die stärkste Zunahme und die stärkste Abnahme des Volumens an.

## Lösungen:

1.1

$$A'(t) = \frac{1}{3}t^2 - \frac{14}{3}t + 15$$

$$\frac{1}{3}t^2 - \frac{14}{3}t + 15 = 0 \Rightarrow t_1 = 5 \quad t_2 = 9$$

Skizze von  $A'$ :

$\Rightarrow$  Der Absatz fällt von Anfang Mai bis Anfang September

1.2

$$A''(t) = \frac{2}{3}t - \frac{14}{3} \Rightarrow \frac{2}{3}t - \frac{14}{3} = 0 \Rightarrow t = 7$$

Skizze von  $A'$ :

$\Rightarrow t = 7$  absoluter Tiefpunkt von  $A'$   $\Rightarrow t = 7$  Stelle mit stärkster Abnahme von  $A(t)$

$\Rightarrow$  Anfang Juli ist der Absatzrückgang am größten

$$2.1 \quad V'(0) = 0 \quad V'(1,5) = 35 \quad V'(6) = 0 \quad V'(9,5) = -42 \quad V'(12) = 0$$

2.2 Am Anfang gibt es weder Zu- noch Ablauf. Der Zufluss steigt an bis zum Wert 42 l/min zum Zeitpunkt  $t = 2,5$  min. Der Zufluss nimmt danach ab, bis er zum Zeitpunkt  $t = 6$  min ganz versiegt. Danach nimmt der Abfluss zu bis zum Zeitpunkt  $t = 9,5$  min, an dem er 42 l/min beträgt. Dann nimmt der Abfluss ab und zum Zeitpunkt  $t = 12$  min ist er 0 l/min.

2.3 Stärkste Zunahme: 42 l/min

Stärkste Abnahme: 42 l/min