Anwendungsaufgaben zur Differenzialrechnung

1.0 An steilen schneebedeckten Berghängen kommt es im Frühjahr häufig zum Abgleiten von flachen, etwas überhängenden Schneemassen, sogenannten Schneebrettern. Den Weg, den ein Schneebrett an einem Berghang mit 60° Neigung in Abhängigkeit der Zeit t zurücklegt, kann mit Hilfe der Funktion $s(t) = 4{,}285t^2 - 0{,}035t$ beschrieben werden.

1.1 Bestimmen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Schneebretts zwischen 3 sec und 5 sec.

1.2 30 m unterhalb der Abbruchstelle sind zur Verlangsamung abgleitender Schneebretter Hindernisse befestigt.
Berechnen Sie, mit welcher Geschwindigkeit die Schneemassen auf die Hindernisse treffen.

1.3 Ermitteln Sie, mit welcher Geschwindigkeit die Schneemassen nach 100 m das Tal erreichen, wenn man annimmt, dass der Schnee reibungsfrei ins Tal abgleiten kann.

2.0 Die Holzmasse (in Kubikmeter) eines Waldes verändert sich wie folgt:

Jahr	0	1	2	3	4	5
m^3	50000	59999	72438	87317	104636	124395

2.1 Bestimmen Sie eine quadratische Funktion, die die Veränderung der Holzmasse beschreibt.

2.2 Berechnen Sie die mittlere Änderung der Holzmasse für die Zeiträume (1) 0 bis 2 Jahre (2) 1 bis 5 Jahre.

2.3 Ermitteln Sie die Änderung der Holzmasse zum Zeitpunkt 3 Jahre.

3.0 Die Bevölkerung von Neudorf hat sich seit 1970 näherungsweise gemäß $N(t) = 2t^2 + 120t + 5000$ entwickelt. N(t) ist die Einwohnerzahl zum Zeitpunkt t, t ist die Zeitspanne seit dem 1.1.1970 in Jahren gemessen.

3.1 Bestimmen Sie, welche Einwohnerzahlen sich an den Stichtagen 1.1.1990 und 1.7.2000 ergeben.

3.2 Ermitteln Sie die durchschnittliche Änderung der Einwohnerzahl im ersten Jahrzehnt.

3.3 Berechnen Sie die momentane Änderungsrate zum Beginn des Jahres 1980.

4.0 Ein kegelförmiges Gefäß ist 150 cm hoch und fasst 100 l. Es wird aus einem Wasserhahn mit dem konstanten Wasserfluss 0,1 l/sec gefüllt.
Die Wasserhöhe h im Gefäß kann in Abhängigkeit der Füllzeit t mit Hilfe der Funktion $h(t) = 15 \cdot \sqrt[3]{t}$ beschrieben werden.

4.1 Ermitteln Sie die Wasserhöhe zum Zeitpunkt t = 27 sec.

4.2 Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem die Wasserhöhe 1 Meter beträgt.

4.3 Berechnen Sie die durchschnittliche Änderung der Wasserhöhe zwischen 10 und 15 Sekunden.

4.4 Bestimmen Sie die momentane Änderung der Wasserhöhe zum Zeitpunkt 20 Sekunden.

4.5 Interpretieren Sie die Ableitung im Sachzusammenhang.

Lösungen

1.1

$$s(3) = 4{,}285 \cdot 3^2 - 0{,}035 \cdot 3 = 38{,}46 \text{ m}$$

$$s(5) = 4{,}285 \cdot 5^2 - 0{,}035 \cdot 5 = 106{,}95 \text{ m}$$

Durchschnittsgeschwindigkeit:

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{106{,}95 \text{ m} - 38{,}46 \text{ m}}{5 \text{ sec} - 3 \text{ sec}} = \frac{68{,}49 \text{ m}}{2 \text{ sec}} = 34{,}245 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

1.2

$$30 \text{ m} = 4{,}285 \cdot t^2 - 0{,}035 \cdot t \qquad \Rightarrow 4{,}285 \cdot t^2 - 0{,}035 \cdot t - 30 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{0{,}035 \pm \sqrt{(-0{,}035)^2 - 4 \cdot 4{,}285 \cdot (-30)}}{8{,}57} = \frac{0{,}035 \pm \sqrt{514{,}20}}{8{,}57} =$$

$$\frac{0{,}035 \pm 22{,}68}{8{,}57} \qquad \Rightarrow t_1 = 2{,}65 \qquad t_2 = -2{,}64 \ (\notin D)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = 8{,}57t - 0{,}035 \qquad \Rightarrow \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=2{,}65} = 8{,}57 \cdot 2{,}65 - 0{,}035 = 22{,}68 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

1.3

$$100 \text{ m} = 4{,}285 \cdot t^2 - 0{,}035 \cdot t \qquad \Rightarrow 4{,}285 \cdot t^2 - 0{,}035 \cdot t - 100 = 0$$

$$\Rightarrow t_{1/2} = \frac{0{,}035 \pm \sqrt{(-0{,}035)^2 - 4 \cdot 4{,}285 \cdot (-100)}}{8{,}57} = \frac{0{,}035 \pm \sqrt{1714}}{8{,}57} =$$

$$\frac{0{,}035 \pm 41{,}40}{8{,}57} \qquad \Rightarrow t_1 = 4{,}83 \qquad t_2 = -4{,}83 \ (\notin D)$$

$$\frac{ds(t)}{dt} = 8{,}57t - 0{,}035 \qquad \Rightarrow \left.\frac{ds(t)}{dt}\right|_{t=4{,}83} = 8{,}57 \cdot 4{,}83 - 0{,}035 = 41{,}36 \frac{\text{m}}{\text{sec}}$$

2.1

$M(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ (t ist die Zeit in Jahren)

(I) $50000 = c$

(II) $59999 = a + b + 50000$

(III) $72438 = 4a + 2b + 50000$

(II) $\Rightarrow b = 9999 - a$

$\Rightarrow 72438 = 4a + 2(9999 - a) + 50000 \quad \Rightarrow 72438 = 4a + 19998 - 2a + 50000$

$\Rightarrow 2440 = 2a \quad \Rightarrow a = 1220$

$\Rightarrow b = 9999 - 1220 = 8779$

$\Rightarrow M(t) = 1220t^2 + 8779t + 50000$

2.2

(1) $\dfrac{\Delta M}{\Delta t} = \dfrac{72438\ m^3 - 50000\ m^3}{2-0} = \dfrac{22438\ m^3}{2} = 11219 \dfrac{m^3}{\text{Jahr}}$

(2) $\dfrac{\Delta M}{\Delta t} = \dfrac{124395\ m^3 - 59999\ m^3}{5-1} = \dfrac{64396\ m^3}{4} = 16099 \dfrac{m^3}{\text{Jahr}}$

2.3 $\dfrac{dM(t)}{dt} = 2440t + 8779 \qquad \Rightarrow \dfrac{dM(t)}{dt}\Big|_{t=3} = 2440 \cdot 3 + 8779 = 16099 \dfrac{m^3}{\text{Jahr}}$

3.1 $N(20) = 8200 \qquad N(30,5) = 10521$

3.2 $\dfrac{N(10) - N(0)}{10 - 0} = \dfrac{6400 - 5000}{10} = 140$

3.3 $\dot{N}(t) = 4t + 120 \quad \Rightarrow \dot{N}(10) = 4 \cdot 10 + 120 = 160$

4.1 $h(27) = 15 \cdot \sqrt[3]{27} = 15 \cdot 3 = 45\ cm$

4.2 $15 \cdot \sqrt[3]{t} = 100 \quad \Rightarrow \sqrt[3]{t} = \dfrac{20}{3} \quad \Rightarrow t = \left(\dfrac{20}{3}\right)^3 \approx 296,30 \text{ sec}$

4.3 $\dfrac{h(15) - h(10)}{15 - 10} \approx \dfrac{36,99 - 32,32}{5} \approx 0,934 \ \dfrac{cm}{\text{sec}}$

4.4 $\dot{h}(t) = 15 \cdot \dfrac{1}{3} \cdot t^{-\frac{2}{3}} = 5t^{-\frac{2}{3}} \quad \Rightarrow \dot{h}(20) = 5 \cdot 20^{-\frac{2}{3}} \approx 0,68 \ \dfrac{cm}{\text{sec}}$

4.5 Die Ableitung gibt die Steiggeschwindigkeit des Wasserspiegels an.