# Anwendungsaufgaben zu den gebrochenrationalen Funktionen

1.0 Zur Unterstützung der Stromversorgung einer Gemeinde wird in der Zeit von 12.00 Uhr bis 18.00 Uhr ein kleines Wasserkraftwerk zugeschaltet. Durch unterschiedlichen Wasserdurchfluss in $m^3$ pro Minute ( $\frac{m^3}{\min}$ ) kann die Stromabgabe an den Energiebedarf der Gemeinde angepasst werden. Der Wasserdurchfluss an einem bestimmten Tag wird in Abhängigkeit von der Tageszeit annähernd durch den Funktionsterm $w(t) = 60 \cdot \frac{t+360}{2t+180}$ beschrieben. Dabei bedeutet t die Zeit in Minuten (min) von 12.00 Uhr bis 18.00 Uhr, d.h. $D_w = [0; 360]$. Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.
(Abitur 2008 AI)

1.1 Berechnen Sie den Wasserdurchfluss um 13.00 Uhr und um 15.00 Uhr.

1.2 Ermitteln Sie, um welche Uhrzeit im betrachteten Zeitraum der Wasserdurchfluss und damit die Stromerzeugung des Elektrizitätswerkes am größten ist.

1.3 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion w in ein geeignetes Koordinatensystem.
(Maßstab: t-Achse: 1 cm = 30 min; w-Achse: 1 cm = 10 $\frac{m^3}{\min}$ )

2.0 Die Herstellungskosten k(x) (in Euro) pro Gerät eines bestimmten Plasma-Fernsehgerätes in Abhängigkeit von der Stückzahl x können durch die reelle Näherungsfunktion mit dem Funktionsterm $k(x) = \frac{1100x + 120000}{2x+3}$ für $x \in \mathbb{R} \wedge x \geq 50$ beschrieben werden.
(Abitur 2010 AII)

2.1 Berechnen Sie die Herstellungskosten pro Fernsehgerät bei 100 bzw. 1000 produzierten Fernsehgeräten und die Stückzahl, ab der die Herstellungskosten pro Gerät unter 600 € liegen.

2.2 Zeigen Sie, dass sich die Herstellungskosten eines Gerätes mit wachsender Stückzahl immer mehr verringern.
(Zur Kontrolle: $k'(x) = \frac{-236700}{(2x+3)^2}$ )

2.3 Ermitteln Sie k´(100) und k´(1000) und interpretieren Sie die Ergebnisse im Sachzusammenhang.

2.4 Bestimmen Sie $\lim\limits_{x \to \infty} k(x)$ und interpretieren Sie das Ergebnis im Sinne der vorliegenden Thematik.

2.5 Zeichnen Sie den Graphen $G_k$ von k und seine Asymptote für $x \in [50;1200]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse in ein Koordinatensystem.

3.0 Der Sauerstoffgehalt S von Gewässern, der in mg/l (Milligramm pro Liter) angegeben wird, lässt Rückschlüsse auf den Fischbestand der Gewässer zu. Ertragreiche Fischgewässer haben einen Sauerstoffgehalt von mehr als 6 mg/l. Dieser hängt unter anderem von der Wassertemperatur und dem Grad der Verunreinigung des Wassers ab. Ein Bach wird zum Zeitpunkt t = 0 durch Einleiten von organischen Abfällen an einer Stelle verunreinigt. Bei annähernd konstanter Temperatur beschreibt folgende Funktion modellhaft den Sauerstoffgehalt in der Nähe der Einleitungsstelle in den Tagen nach der Verunreinigung: $S: t \mapsto S(t) = \frac{-36t}{t^2+16} + 6 \ \ (t \geq 0 \text{ in Tagen})$

Bei den Rechnungen kann auf Einheiten verzichtet werden. Runden Sie Ergebnisse auf zwei Nachkommastellen. (Abitur 2014 AI)

3.1 Geben Sie den Sauerstoffgehalt S zu Beginn der Schadstoffeinleitung an und ermitteln Sie den Wert, auf den sich S langfristig einstellen wird.

3.2 Ermitteln Sie die Zeitintervalle, in denen der Sauerstoffgehalt steigt bzw. fällt und bestimmen Sie damit die Koordinaten des Extrempunktes von S. Interpretieren Sie die Koordinaten des Extrempunktes im Sachzusammenhang.

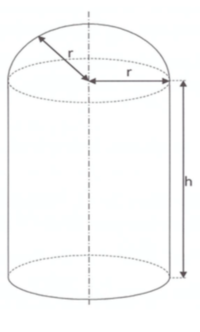
(Zur Kontrolle: $\dot{S}(t) = 36 \cdot \frac{t^2-16}{(t^2+16)^2}$ )

3.3 Zeichnen Sie den Verlauf des Sauerstoffgehaltes für die ersten 12 Tage in ein geeignetes Koordinatensystem.

3.4 Unterhalb eines Wertes von 3 mg/l können Fische nicht überleben. Untersuchen Sie rechnerisch, ab welchem Zeitpunkt ein Fischsterben wegen Sauerstoffmangel zu erwarten ist und ab welchem Zeitpunkt der Sauerstoffgehalt ein Überleben der Fische wieder ermöglicht.

4.0 In hochwertige Edelstahlfläschchen sollen jeweils 100 $cm^3$ Parfüm abgefüllt werden. Die Form des Fläschchens ist durch einen geraden Kreiszylinder mit einer oben aufgesetzten Halbkugel vorgegeben. Die Aussparung für den Sprühkopf wird nicht berücksichtigt. Für die Oberfläche O (in $cm^2$) des Fläschchens in Abhängigkeit von seinem Radius r (in cm) erhält man die Funktionsgleichung $O(r) = \frac{5}{3}\pi r^2 + \frac{200}{r}$ mit der Definitionsmenge $D_O = ]0; 3,5]$. Auf die Mitführung von Einheiten wird verzichtet. Runden Sie gegebenenfalls Ihre Ergebnisse auf zwei Stellen nach dem Komma. (Abitur 2018 AI)





4.1 Bestimmen Sie das Verhalten von $O(r)$ für $r \to 0$ .

4.2 Berechnen Sie den Radius r, für den die Oberfläche O den absolut kleinsten Wert annimmt und bestätigen Sie, dass $O_{min} \approx 112{,}23\,(cm^2)$ gilt.

4.3 Erstellen Sie für 1 ≤ r ≤ 3,5 eine Wertetabelle mit der Schrittweite $\Delta r = 0{,}5$ . Zeichnen Sie den Graphen der Funktion O in ein Koordinatensystem im angegebenen Bereich. Wählen Sie hierfür einen geeigneten Maßstab.

4.4 Der Parfümhersteller möchte aus optischen Gründen den Radius r = 2 (cm) wählen. Berechnen Sie dafür den Mehrbedarf an Edelstahlblech im Vergleich zu $O_{min}$ in Prozent. Begründen Sie stichhaltig, dass für alle Radien mit $r \in [2; 3{,}5]$ weniger als 10% Mehrbedarf an Blech im Vergleich zu $O_{min}$ benötigt werden.

# Lösungen

1.1 $w(60) = 84 \qquad w(180) = 60$

1.2

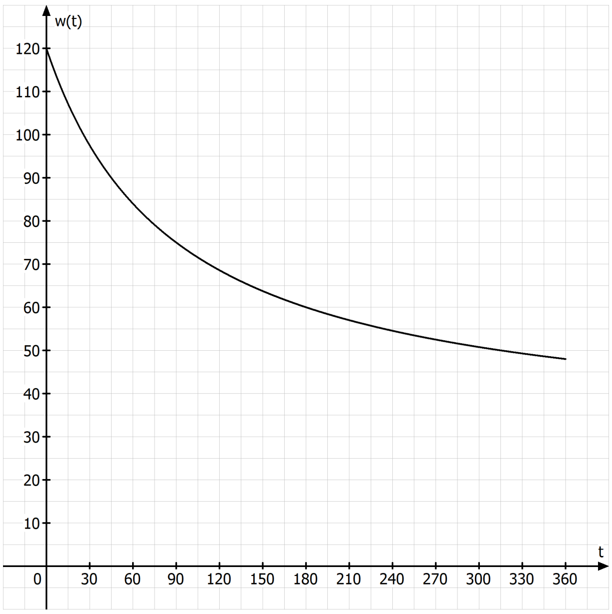
$$\dot{w}(t) = 60 \cdot \frac{1 \cdot (2t+180) - (t+360) \cdot 2}{(2t+180)^2} = 60 \cdot \frac{-540}{(2t+180)^2}$$

$\dot{w}(t)$ ist für alle $t \in D_w$ negativ

$\Rightarrow$ w ist für alle $t \in D_w$ streng monoton abnehmend

$\Rightarrow$ absolutes Maximum bei t = 0, d.h. um 12.00 Uhr

1.3




2.1

$k(100) \approx 1133 \qquad k(1000) \approx 609$

$\frac{1100x + 120000}{2x+3} < 600 \quad \Rightarrow 1100x + 120000 < 600 \cdot (2x+3)$ (2x + 3 positiv für x � 50)

$\Rightarrow 1100x + 120000 < 1200x + 1800 \quad \Rightarrow 100x > 118200 \quad \Rightarrow x > 1182$

Ab 1183 Geräte betragen die Herstellungskosten unter 600 €

2.2

$$k'(x) = \frac{1100(2x+3) - (1100x + 120000) \cdot 2}{(2x+3)^2} = \frac{-236700}{(2x+3)^2}$$

$k'(x) = 0 \quad \Rightarrow -236700 = 0 \text{ (f)} \quad \Rightarrow$ kein Extremum

k´ negativ für alle x � 50, da Zähler immer negativ und Nenner immer positiv

Herstellungskosten streng monoton fallend für x � 50

2.3

$k'(100) = -5{,}74 \qquad k'(1000) = -0{,}06$

Bei der Herstellung von einem Gerät mehr vermindern sich die Herstellungskosten

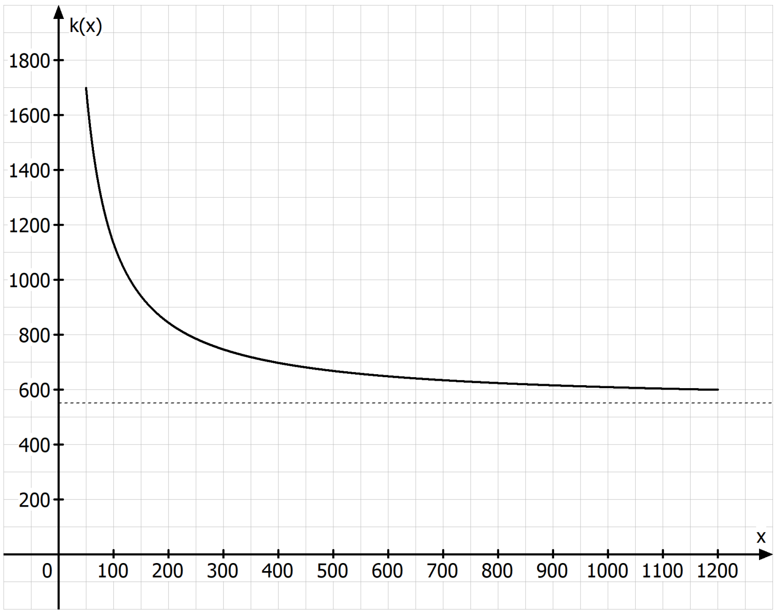
je Gerät bei 100 Geräten um 5,74 € pro Stück und bei 1000 Geräten um 0,06 € pro Stück.

2.4

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1100x+120000}{2x+3}=\frac{1100}{2}=550 \quad \text{(weil Zählergrad = Nennergrad)}$$

Die Herstellungskosten nähern sich für sehr große Stückzahlen 550 € pro Stück an.

2.5




3.1

$$S(t)=\frac{-36t}{t^2+16}+6 \quad t\geq 0$$

$S(0)=6 \;\Rightarrow$ zu Beginn beträgt der Sauerstoffgehalt 6 mg/l

$\lim\limits_{t\to\infty}\left(\frac{-36t}{t^2+16}+6\right)=6 \Rightarrow$ der Sauerstoffgehalt wird sich langfristig auf 6 mg/l einstellen

3.2

$$\dot{S}(t)=\frac{-36\cdot\left(t^2+16\right)-(-36t)\cdot 2t}{\left(t^2+16\right)^2}=\frac{36t^2-576}{\left(t^2+16\right)^2}$$

$\dot{S}(t)=0 \;\Rightarrow 36t^2-576=0 \;\Rightarrow t^2=16 \;\Rightarrow (t_1=-4)\notin D \quad t_2=4$

Skizze von $\dot{S}$: Nenner immer positiv

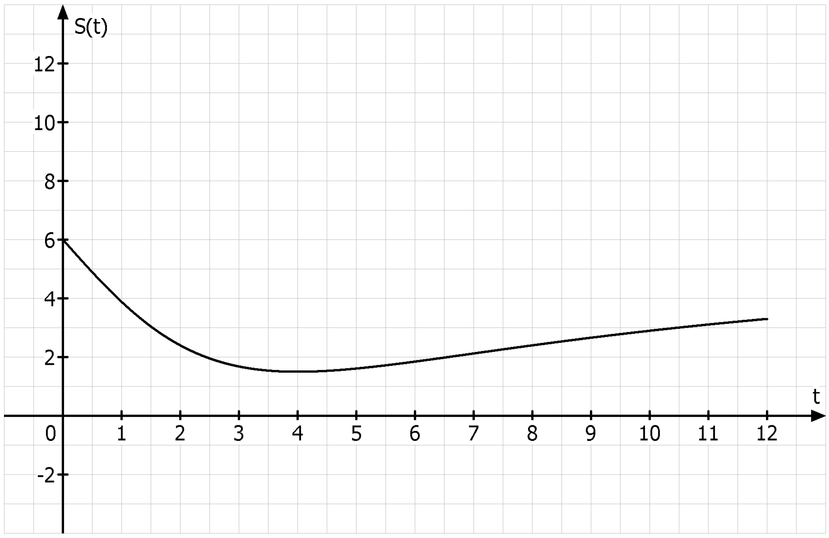
Skizze von $\left(36t^2-576\right)$:

$\Rightarrow G_S$ sms in $[4;\infty[$ $\qquad G_S$ smf in $[0;4]$

$\Rightarrow t=4$ Minimum $\quad \Rightarrow \text{Min}(4/1{,}5)$

Der Sauerstoffgehalt ist nach vier Tagen mit 1,5 mg/l am geringsten.

3.3




3.4

$\frac{-36t}{t^2+16}+6 \le 3 \;\Rightarrow \frac{-36t}{t^2+16} \le -3 \;\Rightarrow -36t \le -3t^2 - 48$ ($t^2+16$ immer positiv)

$\Rightarrow -3t^2+36t-48 \le 0$

$\Rightarrow -3t^2+36t-48 = 0 \quad \Rightarrow t_1 = 6-2\sqrt{5} \qquad t_2 = 6+2\sqrt{5}$

Skizze von $\left(-3t^2+36t-48\right)$:

$\Rightarrow$ nach 1,5 Tagen ist ein Fischsterben zu erwarten und nach 10,5 Tagen ist ein Überleben wieder möglich;

4.1 $\lim\limits_{r\to 0}\left(\frac{5}{3}\pi r^2+\frac{200}{r}\right)$ existiert nicht $\quad O(r)\to\infty$ für $r\to 0$

4.2

$O'(r) = \frac{10}{3}\pi r - \frac{200}{r^2}$

$O'(r)=0 \quad \Rightarrow \frac{10}{3}\pi r - \frac{200}{r^2} = 0 \quad \Rightarrow r^3 = \frac{\frac{3}{10}\cdot 200}{\pi} = \frac{60}{\pi} \quad \Rightarrow r \approx 2{,}67$

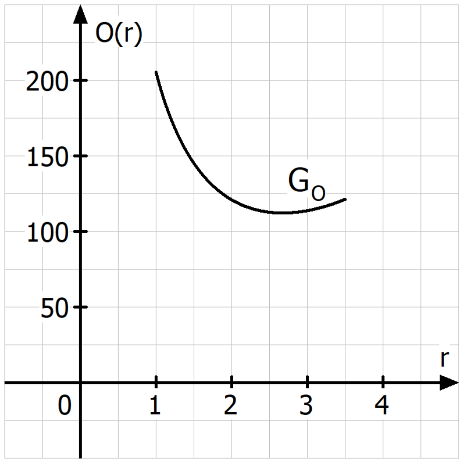
$O''(r) = \frac{10}{3}\pi + \frac{400}{r^3} \quad \Rightarrow O''(2{,}67) > 0 \quad \Rightarrow r = 2{,}67$ Minimum

Da O im Bereich [0;3,5] nur ein Extremum (Minimum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow r = 2{,}67$ absolutes Minimum

$O_{min} = O(2{,}67) \approx 112{,}23$

4.3

| r | 1 | 1,5 | 2 | 2,5 | 3 | 3,5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| O(r) | 205,24 | 145,11 | 120,94 | 112,72 | 113,79 | 121,28 |




4.4

$O(2) \approx 120{,}94$

$$\frac{O(2)}{O_{min}} = \frac{120{,}94}{112{,}23} = 1{,}0776$$

$\Rightarrow$ Mehrbedarf etwa 7,76%

O(r) liegt für alle $r \in [2; 3{,}5]$ höchstens bei O(3,5)=121,28 und damit ist der Mehrbedarf immer kleiner oder gleich 8,06%, also auf jeden Fall kleiner als 10%.