Anwendungsaufgaben zur allgemeinen Exponentialfunktion

1. Im Jahre 1975 gab es auf der Erde 4,033 Milliarden Menschen. Man rechnet mit einer Verdoppelungszeit der Erdbevölkerung von etwa 40 Jahren.

   a) Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion ab 1975 auf.
   Bestimmen Sie damit die Bevölkerungszahlen der Jahre 1990 und 2000.

   b) In Europa beträgt die jährliche Wachstumsrate 0,35% und in Afrika 2,94%. Vergleichen Sie die Verdoppelungszeiten.

2. Eine Bakterienkultur von 3800 Individuen wurde um 9.00 Uhr sich selbst überlassen. Um 13.00 Uhr umfasste sie bereits 31500 Bakterien.

   a) Nehmen Sie exponentielles Wachstum an und stellen Sie die Wachstumsfunktion Zeit → Bakterienzahl auf.

   b) Berechnen Sie den Bestand um 11.00 Uhr, 14.30 Uhr und 16.00 Uhr.

   c) Bestimmen Sie den Zeitpunkt, zu dem 12000 Bakterien vorhanden sind.

   d) Ermitteln Sie die Zeitspanne, in der sich die jeweils vorhandene Bakterienzahl verdoppelt.

   e) Berechnen Sie den Zeitpunkt, zu dem sich die ursprüngliche Bakterienzahl verdoppelt hat.

3. Wolfram 181 hat eine Halbwertszeit von 5,3 sec. Im Augenblick sind 500 mg vorhanden.

   a) Bestimmen Sie, wie viel Milligramm in einer Minute zerfallen sind.

   b) Ermitteln Sie, wie viel Milligramm es vor zehn Sekunden waren.

4. Ein Körper mit einer Temperatur von 300°C wird zum Abkühlen in einen Raum mit der gleich bleibenden Temperatur von 0°C gebracht.
Innerhalb einer Stunde sinkt die Temperatur jeweils auf 40% ihres Wertes zu Beginn dieser Stunde. Mit f(t) wird die Temperatur des Körpers nach t Stunden bezeichnet.

a) Vervollständigen Sie die folgende Wertetabelle.

t in h	0	1	2	3	4	5
f(t) in °C						

b) Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion f(t) und zeichnen Sie den Graphen der Funktion f(t).

c) Ermitteln Sie, wann die Temperatur auf 100°C abgesunken ist.

5. Bei der Verbrennung von Kohle, Öl und Erdgas entsteht Kohlendioxid (CO_2). Pflanzen assimilieren CO_2 und geben dafür Sauerstoff ab (Photosynthese). Durch die zunehmende Verbrennung von fossilen Energieträgern und die Rodung von riesigen Urwäldern können die Pflanzen nur noch rund 45% des durch Verbrennung erzeugten Kohlendioxids abbauen. Der CO_2-Gehalt der Luft steigt deshalb ständig.

a) Im Jahr 1980 wurden auf der Erde $5{,}4 \cdot 10^{12}\ kg$ Kohlenstoff zu CO_2 verbrannt. $7{,}2 \cdot 10^{14}\ kg$ Kohlenstoff befanden sich als Kohlendioxid bereits in der Atmosphäre.
Ermitteln Sie, um wie viel Prozent der CO_2-Gehalt der Luft in diesem Jahr zunahm.

b) Wir nehmen an, dass dieser prozentuale Zuwachs (0,4125%) für lange Zeit konstant bleibt. Stellen Sie eine Gleichung der Wachstumsfunktion auf, welche die Kohlenstoffmasse m des Kohlendioxids in Abhängigkeit von der Zeit t in Jahren (nach 1980) beschreibt.

c) Kohlendioxid zeigt ein besonderes Absorptionsverhalten: Die einfallende Sonnenstrahlung wird besser durchgelassen als die Wärmestrahlung, welche die Erde in den Weltraum abstrahlt. Das führt zu einem Treibhauseffekt: Die mittleren Temperaturen auf der Erde nehmen zu.
Ein Anwachsen des CO_2-Gehalts um 50% bringt in den gemäßigten Breiten einen Anstieg der Durchschnittstemperatur um 1 bis 2°C, in den Polarregionen um etwa 5°C.
Berechnen Sie, in welchem Jahr das bei einem gleich bleibenden CO_2-Wachstumsfaktor erreicht wird.

d) Etwa 10% der 10^7 km^2 großen und im Mittel 2000 m hohen Eismassen der Antarktis ruhen auf einem kleinen Festlandsockel. Bei einer deutlichen Temperaturerhöhung im Polargebiet besteht die Gefahr, dass dieses Eis ins Meer rutscht.

Berechnen Sie, um wie viel der Wasserspiegel der $3{,}6 \cdot 10^8 \ km^2$ großen Weltmeere steigen würde.

6. Für die Maßzahl p(h) des barometrischen Luftdrucks mit der Einheit Hektopascal gilt in Abhängigkeit von der Maßzahl h der Höhe über der Erdoberfläche mit der Einheit Kilometer in guter Näherung die Funktionsgleichung $p(h) = 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5{,}5}}$ mit $h \geq 0$. Auf die Mitführung der Einheiten wird somit verzichtet.

a) Berechnen Sie, in welcher Höhe $h = h_H$ der Luftdruck nur noch die Hälfte des Wertes an der Erdoberfläche annimmt.

b) Zeigen Sie, dass der Luftdruck bei einer Höhenzunahme um $\Delta h = h_H$ unabhängig von der Ausgangshöhe h_A jeweils halbiert wird.

c) Berechnen Sie, ab welcher Höhe der Luftdruck weniger als $\frac{1}{1000}$ des Wertes an der Erdoberfläche beträgt.

d) Zeigen Sie, dass man die Funktionsgleichung auch in der Form $p(h) = 1013 \cdot e^{\frac{\ln 0{,}5}{5{,}5} \cdot h}$ schreiben kann und berechnen Sie daraus die Ableitungsfunktion $\frac{dp(h)}{dh}$.

e) Berechnen Sie den Wert des Differenzenquotienten $\frac{p(1) - p(0)}{1 - 0}$ sowie den Wert des Differentialquotienten der Funktion p(h) an der Stelle $h_0 = 1$ und geben Sie die physikalische Bedeutung der beiden Werte an.

7. Ein Schreinermeister kauft eine Holzmaschine für 50000 €. Wegen der Gebrauchsabnutzung verliert sie alle zwei Jahre 36,2 % an Wert.

   a) Bestimmen Sie, welchen Wert die Maschine nach fünf Jahren hat.

   b) Ermitteln Sie, wie viel Prozent die jährliche Wertminderung beträgt.

   c) Bestimmen Sie, wie teuer die Maschine beim Neukauf gewesen wäre, wenn sie nach 4,5 Jahren noch einen Wert von 16370,40 € hätte.

   d) Ermitteln Sie, in welchem Zeitraum die 50000 € teure Maschine 36,2 % an Wert verlieren würde, wenn sie nach 5,5 Jahren noch einen Wert von 21935,18 € hätte.

8. Eine Schallwelle mit der Frequenz 1000 Hz wird vom menschlichen Ohr gerade noch wahrgenommen, wenn sie das Ohr mit einer Intensität der Stärke $I_0 = 10^{-12}$ Watt/m^2 (Hörschwelle) trifft. Mit zunehmender Schallintensität wächst das menschliche Lautstärkeempfinden glücklicherweise nicht proportional, sondern nur logarithmisch (Weber-Fechner-Gesetz). Die Lautstärke L – gemessen in Phon – eines Geräusches der Intensität I ist definiert durch $L = 10 \cdot \lg(I / I_0)$.

   a) Berechnen Sie die Lautstärke bei der Schallintensität 10^{-6} Watt/m^2 (normale Unterhaltung) und bei 10 Watt/m^2 (Schmerzschwelle).

   b) Die Geräuschintensität von Diskomusik ist etwa 10 Milliarden mal so groß wie I_0. Ermitteln Sie, welcher Phonzahl das entspricht.

   c) Bestimmen Sie, wie sich die Schallintensität ändert, wenn die Lautstärke um 10 Phon (z.B. von 60 Phon auf 70 Phon) zunimmt.

Lösungen

1a)

$f(t) = a \cdot b^t$

$f(0) = 4{,}033 \cdot 10^9 \quad \Rightarrow a = 4{,}033 \cdot 10^9$

$f(40) = 2 \cdot 4{,}033 \cdot 10^9 = 8{,}066 \cdot 10^9 \quad \Rightarrow 8{,}066 \cdot 10^9 = 4{,}033 \cdot 10^9 \cdot b^{40}$

$\Rightarrow b^{40} = 2 \quad \Rightarrow b = \sqrt[40]{2} \approx 1{,}01748$

$\Rightarrow f(t) = 4{,}033 \cdot 10^9 \cdot 1{,}01748^t$

Bevölkerungszahl 1990: f(15) $\approx 5{,}23 \cdot 10^9$

Bevölkerungszahl 2000: f(25) $\approx 6{,}22 \cdot 10^9$

1b)

Europa: $\mathrm{f(t) = a \cdot 1{,}0035^t} \quad \Rightarrow 2a = \mathrm{a \cdot 1{,}0035^t}$

$\Rightarrow 1{,}0035^{\mathrm{t}} = 2 \quad \Rightarrow t_E = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}0035} \approx 198$ Jahre

Afrika: $\mathrm{f(t) = a \cdot 1{,}0294^t} \quad \Rightarrow 2a = \mathrm{a \cdot 1{,}0294^t}$

$\Rightarrow 1{,}0294^{\mathrm{t}} = 2 \quad \Rightarrow t_A = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}0294} \approx 24$ Jahre

$\Rightarrow \mathrm{t_E} \approx 8{,}25 \cdot t_A$

2a)

$f(t) = a \cdot b^t$

$f(0) = 3800 \quad \Rightarrow a = 3800$

$f(4) = 31500 \quad \Rightarrow 31500 = 3800 \cdot b^4 \quad \Rightarrow b^4 = 8\dfrac{11}{38} \quad \Rightarrow b = \sqrt[4]{8\dfrac{11}{38}} \approx 1{,}6968$

$\Rightarrow f(t) = 3800 \cdot 1{,}6968^t$

2b) $f(2) \approx 10941 \quad f(5{,}5) \approx 69623 \quad f(7) \approx 153886$

2c)

$12000 = 3800 \cdot 1{,}6968^t \quad \Rightarrow 1{,}6968^t = 3\dfrac{3}{19}$

$\Rightarrow t = \dfrac{\lg(3\frac{3}{19})}{\lg 1{,}6968} \approx 2{,}17h \Rightarrow 11.10$ Uhr

2d) $1{,}6968^t = 2 \quad \Rightarrow t = \dfrac{\lg 2}{\lg 1{,}6968} \approx 1{,}31h$

2e) 1,31h $\Rightarrow$ 1 h 19 min $\Rightarrow$ der Anfangsbestand hat sich um ca. 10.19 Uhr verdoppelt

3a)

$b^{5,3} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow b = \sqrt[5,3]{\frac{1}{2}} \approx 0,8774 \quad \Rightarrow f(t) = 500 \cdot 0,8774^t$

$\Rightarrow$ nach einer Minute (60 sec) noch übrig: $500 \cdot 0,8774^{60} \approx 0,195$

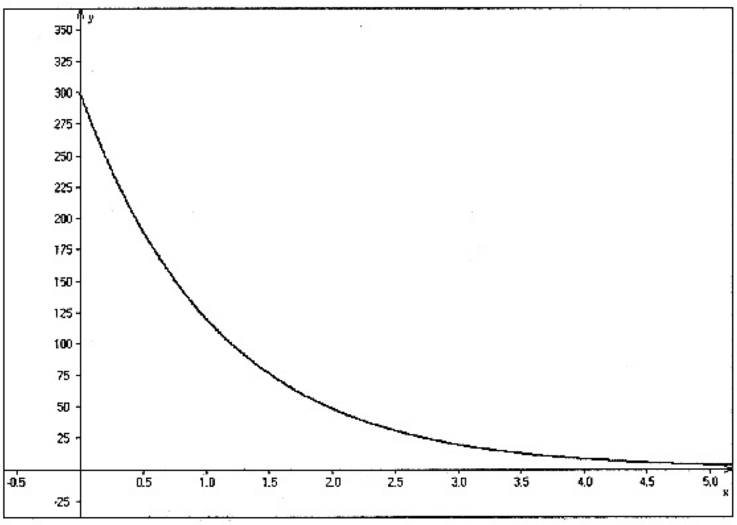
$\Rightarrow$ also sind 500 mg - 0,195 mg = 499,805 mg zerfallen

3b) $a \cdot 0,8774^{10} = 500 \quad \Rightarrow a = \frac{500}{0,8774^{10}} \approx 1849,24 \;\; mg$

4a)

t in h	0	1	2	3	4	5
f(t) in °C	300	120	48	19,2	7,68	3,072

4b) $f(t) = 300 \cdot 0,4^t$



4c) $100 = 300 \cdot 0,4^t \quad \Rightarrow 0,4^t = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow t = \frac{\lg(\frac{1}{3})}{\lg 0,4} \approx 1,199h$ (1h 12 min)

5a)

Menge des übrigen CO_2: $5,4 \cdot 10^{12} \cdot 0,55 = 2,97 \cdot 10^{12}$

$\Rightarrow \frac{2,97 \cdot 10^{12}}{7,2 \cdot 10^{14}} = \frac{33}{8000} \quad (= 0,4125\%)$

5b) $m(t) = 7,2 \cdot 10^{14} \cdot 1.004125^t$

5c) $7,2 \cdot 10^{14} \cdot 1,004125^t = 1,08 \cdot 10^{15} \quad \Rightarrow 1,004125^t = 1,5 \quad \Rightarrow t = \frac{\lg 1,5}{\lg 1,004125} \approx 98,5$ Jahre

5d)

Masse des abrutschenden Eises: $10^7 \cdot 0{,}1 = 10^6 \quad km^2$

Volumen des abrutschenden Eises: $10^6 \cdot 2 = 2 \cdot 10^6 \quad km^3$

$$\Rightarrow 3{,}6 \cdot 10^8 \cdot h_{Wasser} = 2 \cdot 10^6 \quad \Rightarrow h_{Wasser} = \frac{2 \cdot 10^6}{3{,}6 \cdot 10^8} \approx 0{,}0056 \;\; km \approx 5{,}6 \;\; m$$

6a)

Erdoberfläche: $\mathrm{p(0)} = 1013 \cdot 2^0 = 1013$

$$p(h_H) = \frac{1}{2} \cdot p(0) \quad \Rightarrow 1013 \cdot 2^{-\frac{\mathrm{h_H}}{5{,}5}} = \frac{1}{2} \cdot 1013 \quad \Rightarrow 2^{-\frac{\mathrm{h_H}}{5{,}5}} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{h_H}{5{,}5} = -1 \quad \Rightarrow h_H = 5{,}5$$

6b)

$$p(h_A + h_H) = \frac{1}{2} \cdot p(h_A) \quad \Rightarrow 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A + h_H}{5{,}5}} = \frac{1}{2} \cdot 1013 \cdot 2^{-\frac{h_A}{5{,}5}}$$

$$\Rightarrow 2^{-\frac{h_A + h_H}{5{,}5}} = 2^{-1} \cdot 2^{-\frac{h_A}{5{,}5}} \quad \Rightarrow 2^{-\frac{h_A + h_H}{5{,}5}} = 2^{-1-\frac{h_A}{5{,}5}} \quad \Rightarrow -\frac{h_A + h_H}{5{,}5} = -1 - \frac{h_A}{5{,}5}$$

$$\Rightarrow -\frac{h_A}{5{,}5} - \frac{h_H}{5{,}5} = -1 - \frac{h_A}{5{,}5} \quad \Rightarrow \frac{h_H}{5{,}5} = 1 \quad \Rightarrow h_H = 5{,}5 \text{ (unabhängig von } \mathrm{h_A})$$

6c)

$$p(h) < \frac{1}{1000} \cdot p(0) \quad \Rightarrow 1013 \cdot 2^{-\frac{h}{5{,}5}} < \frac{1}{1000} \cdot 1013 \quad \Rightarrow 2^{-\frac{h}{5{,}5}} < \frac{1}{1000}$$

$$\Rightarrow -\frac{h}{5{,}5} < \frac{\lg(\frac{1}{1000})}{\lg 2} \quad \Rightarrow h > \frac{\lg(\frac{1}{1000})}{\lg 2} \cdot (-5{,}5) \quad \Rightarrow h > 54{,}81$$

Ab einer Höhe von 55 km beträgt der Luftdruck weniger als $\frac{1}{1000}$ des Wertes an der Erdoberfläche.

6d)

$$2^{-\frac{h}{5{,}5}} = \frac{1}{2^{\frac{h}{5{,}5}}} = \frac{1}{e^{\frac{h}{5{,}5} \cdot \ln 2}} = \left(e^{\frac{h}{5{,}5} \cdot \ln 2} \right)^{-1} = e^{\frac{h}{5{,}5} \cdot (-\ln 2)} = e^{\frac{h}{5{,}5} \cdot (\ln 2^{-1})} = e^{\frac{h}{5{,}5} \cdot \ln 0{,}5} = e^{\frac{\ln 0{,}5}{5{,}5} \cdot h}$$

$$\frac{dp(h)}{dh} = 1013 \cdot e^{\frac{\ln 0{,}5}{5{,}5} \cdot h} \cdot \frac{\ln 0{,}5}{5{,}5}$$

6e)

$$\frac{p(1)-p(0)}{1-0}=\frac{1013\cdot 2^{-\frac{1}{5,5}}-1013\cdot 2^{0}}{1}\approx -120$$

$$\left.\frac{dp(h)}{dh}\right|_{h=1}=1013\cdot e^{\frac{\ln 0,5}{5,5}\cdot 1}\cdot\frac{\ln 0,5}{5,5}\approx -113$$

Physikalische Bedeutung:

-120: mittlere Druckabnahme im Intervall von h = 0 km bis h = 1 km

-113: lokale Druckabnahme in der Höhe h = 1 km

$$7a)\ K_n = 50000\cdot 0,638^{\frac{n}{2}} \qquad \Rightarrow K_5 = 50000\cdot 0,638^{\frac{5}{2}} = 16256,30\ €$$

$$7b)\ K_1 = 50000\cdot 0,638^{\frac{1}{2}} \qquad \Rightarrow \frac{K_1}{K_0}=\frac{50000\cdot 0,638^{\frac{1}{2}}}{50000}=0,638^{\frac{1}{2}}\approx 0,7987$$

$\Rightarrow$ die jährliche Wertminderung beträgt p = 20,13 %

$$7c)\ 16370,40 = K_0\cdot 0,638^{\frac{4,5}{2}} \qquad \Rightarrow K_0=\frac{16370,40}{0,638^{2,25}}\approx 45000\ €$$

$$7d)\ 21935,18 = 50000\cdot q^{5,5} \qquad \Rightarrow q^{5,5}=\frac{21935,18}{50000}\approx 0,4387 \qquad \Rightarrow q=\sqrt[5,5]{0,4387}\approx 0,861$$

$$50000\cdot 0,638 = 31900$$

$$31900 = 50000\cdot 0,861^{n} \qquad \Rightarrow 0,861^{n}=\frac{31900}{50000}=0,638 \qquad \Rightarrow n=\frac{\lg(0,638)}{\lg(0,861)}\approx 3$$

$$8a)\ L=10\cdot\lg(10^{-6}/10^{-12})=60$$

$$L=10\cdot\lg(10/10^{-12})=130$$

$$8b)\ L=10\cdot\lg(10\cdot 10^{9}\cdot 10^{-12}/10^{-12})=100$$

$$8c)\ L=10\cdot\lg(I/I_0) \qquad \Rightarrow \lg(I/I_0)=\frac{L}{10} \qquad \Rightarrow I/I_0=10^{\frac{L}{10}} \qquad \Rightarrow I(L)=10^{\frac{L}{10}}\cdot I_0$$

$$I(L+10)=10^{\frac{L+10}{10}}\cdot I_0=10^{\frac{L}{10}}\cdot 10\cdot I_0=10\cdot I(L)$$

$\Rightarrow$ die Schallintensität verzehntfacht sich.