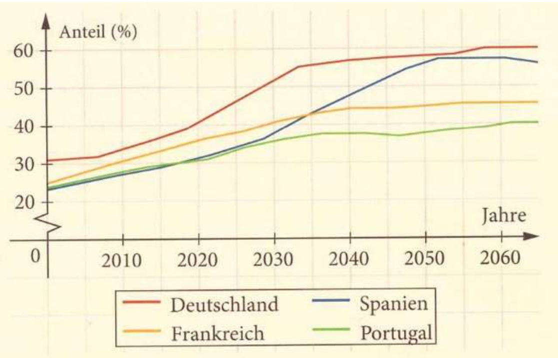
Aufgaben zur Einführung der Differenzialrechnung

1.0 Bestimmen Sie zeichnerisch und rechnerisch die durchschnittliche Änderungsrate in den angegebenen Intervallen.

1.1 $f(x) = 3x^2$ $\quad [0;4] \quad [-3;1]$

1.2 $f(x) = -2x^3 + 2$ $\quad [1;5] \quad [-1;5]$

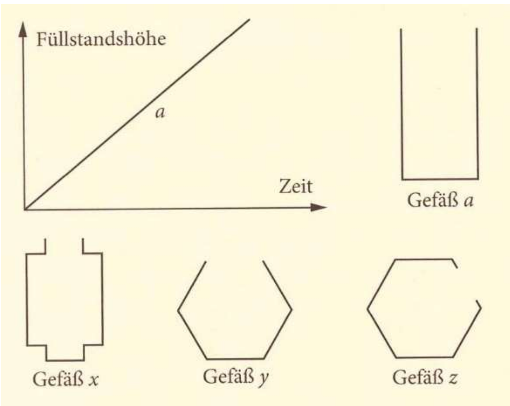
2.0 Die folgende Abbildung zeigt eine Prognose über den Anteil der wirtschaftlich Abhängigen (Kinder, Jugendliche, Rentner) an der Bevölkerung im erwerbsfähigen Alter.



2.1 Ermitteln Sie, in welchem Jahrzehnt der Anteil der wirtschaftlich Abhängigen in Deutschland am stärksten zunimmt.

2.2 Bestimmen Sie die durchschnittliche Änderungsrate in den Jahren von 2010 bis 2060.

3.0 Die Füllkurve vom Gefäß a ist in ein Koordinatensystem eingezeichnet worden.



3.1 Übertragen Sie diese Zeichnung ins Heft und ergänzen Sie die Graphen für x, y und z.

3.2 Erstellen Sie ein weiteres Koordinatensystem und zeichnen Sie zu jedem der vier Gefäße den Graphen der Geschwindigkeit, mit der sich die Höhe verändert.

3.3 Interpretieren Sie die Bedeutung des Graphen aus 3.2 im Hinblick auf den Begriff der Änderungsrate.

4. Erläutern Sie den Unterschied zwischen den Begriffen „Differenzenquotient“ und „Differenzialquotient“ und verdeutlichen Sie diesen Unterschied an einem selbst gewählten Beispiel.

5.0 Bestimmen Sie den Differenzialquotienten der Funktion f für die angegebene Stelle x_0.

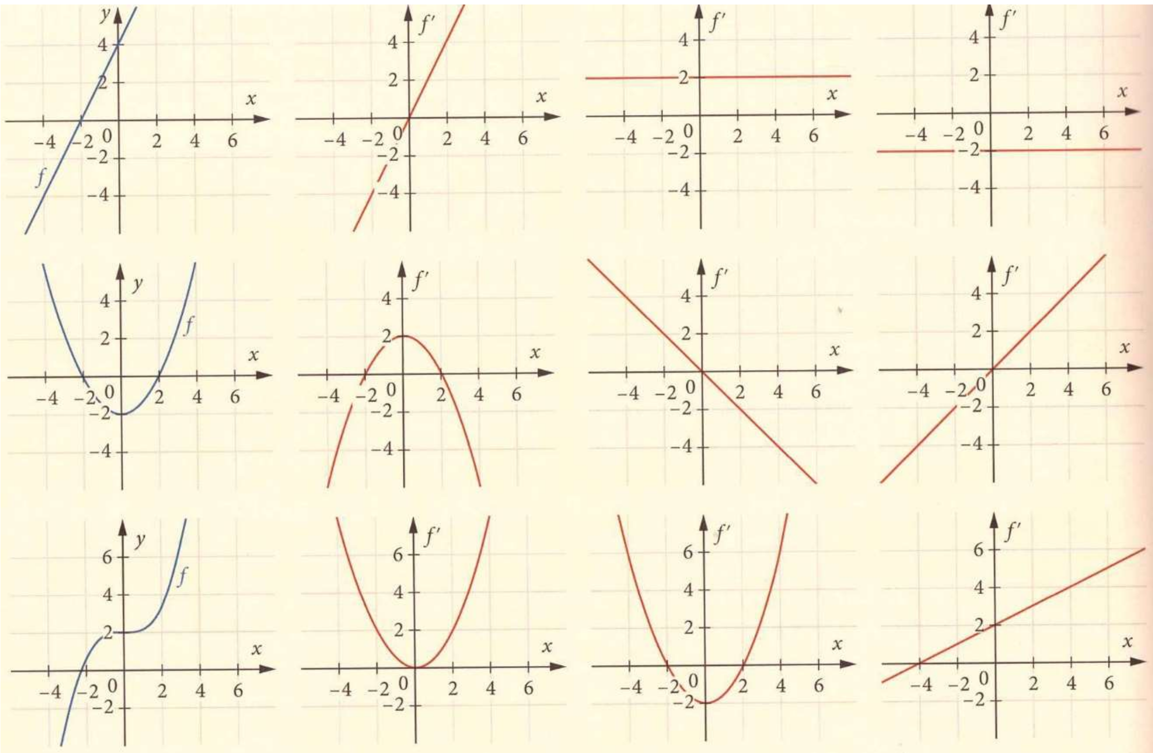
5.1 $f(x) = -2x - 8 \quad x_0 = 1$

5.2 $f(x) = x^2 + 6x + 5 \quad x_0 = 0$

5.3 $f(x) = x^3 - 4x \quad x_0 = -1$

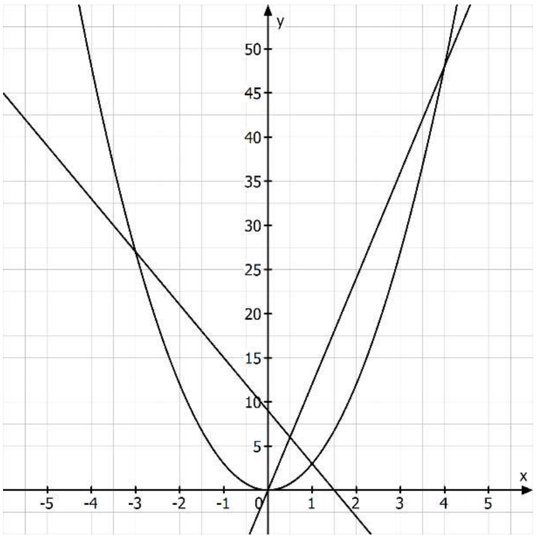
6. Erläutern Sie anschaulich und rechnerisch, ob die Funktion f mit
$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{für } x < 1 \\ x+2 & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$ an der Nahtstelle differenzierbar ist.

7. Der linke Graph ist der Funktionsgraph einer Funktion f.
Entscheiden und begründen Sie, welcher der daneben stehenden Graphen das Steigungsverhalten von f richtig darstellt und begründen Sie, warum die jeweils anderen beiden Graphen falsch sind.



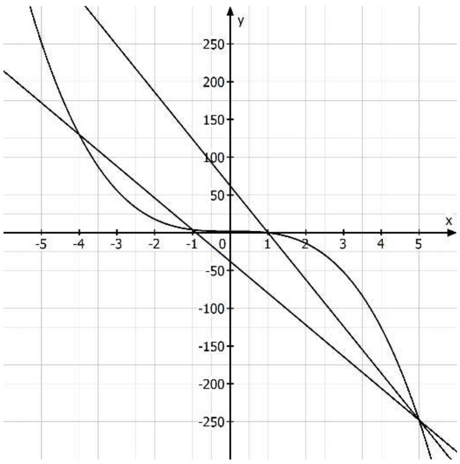
Lösungen

1.1



$$\frac{f(4)-f(0)}{4-0}=\frac{48-0}{4-0}=12 \qquad \frac{f(1)-f(-3)}{1-(-3)}=\frac{3-27}{4}=-6$$

1.2

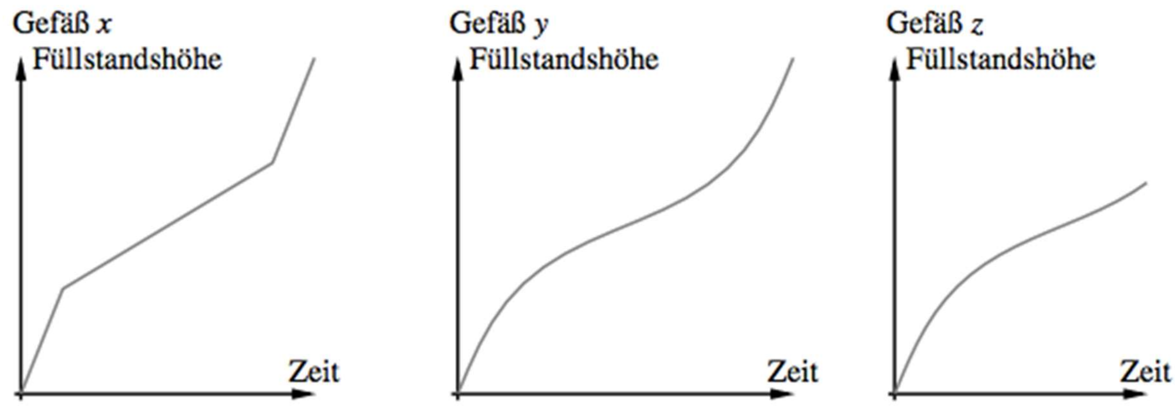


$$\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{-248-0}{4}=-62 \qquad \frac{f(-1)-f(5)}{-1-5}=\frac{4-(-248)}{-6}=-42$$

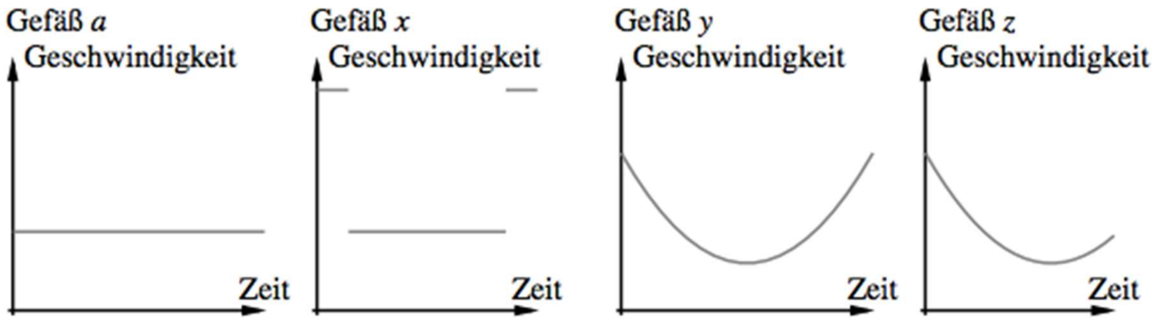
2.1 Zwischen 2020 und 2030

2.2 $\frac{60-35}{2060-2010}=0,5$

3.1



3.2



3.3 Die Geschwindigkeit ist die momentane Änderungsrate der Füllstandshöhe.

4. Der Differenzenquotient gibt die durchschnittliche Steigung eines Graphen (Steigung der Sekante) in einem Intervall an, während der Differenzialquotient die Steigung eines Graphen (Steigung der Tangente) in einem Punkt angibt.

$$f(x) = -2x - 8 \quad [1;5] \qquad \Rightarrow \frac{f(5)-f(1)}{5-1} = \frac{(-18-8)-(-2-8)}{4} = -4$$

$$f(x) = -2x - 8 \quad x_0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-2x-8-(-10)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-2x+2}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}(-2) = -2$$

5.1

$$f(x) = -2x - 8 \quad x_0 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 1}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-2x-8-(-10)}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{-2x+2}{x-1}\right) = \lim_{x\to 1}(-2) = -2$$

5.2

$$f(x) = x^2 + 6x + 5 \quad x_0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+6x+5-5}{x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2+6x}{x}\right) = \lim_{x\to 0}(x+6) = 6$$

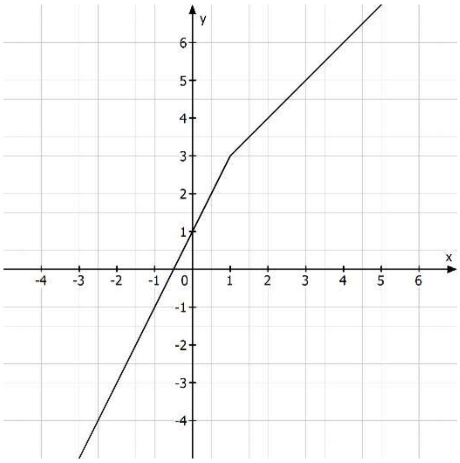
5.3

$$f(x)=x^3-4x \quad x_0=-1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-1}\left(\frac{f(x)-f(-1)}{x-(-1)}\right)=\lim_{x\to-1}\left(\frac{x^3-4x-3}{x+1}\right)=$$

$$\lim_{x\to-1}\left(\frac{(x+1)\left(x^2-x-3\right)}{x+1}\right)=\lim_{x\to-1}\left(x^2-x-3\right)=-1$$

6.



Der Graph von f macht an der Stelle x = 1 einen Knick, also ist f bei x = 1 nicht differenzierbar.

$$\lim_{\substack{< \\ x\to1}}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=\lim_{\substack{< \\ x\to1}}\left(\frac{2x+1-3}{x-1}\right)=\lim_{\substack{< \\ x\to1}}\left(\frac{2x-2}{x-1}\right)=2$$

$$\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right)=\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left(\frac{x+2-3}{x-1}\right)=\lim_{\substack{> \\ x\to1}}\left(\frac{x-1}{x-1}\right)=1$$

7. Beim oberen Graphen wird durch den mittleren Graphen das Steigungsverhalten richtig dargestellt. Beim linken Bild wäre es keine konstante Steigung und beim rechten Bild wäre es eine negative Steigung.

   Beim mittleren Graphen wird durch den rechten Graphen das Steigungsverhalten richtig dargestellt. Beim linken Bild hätte man z.B. bei x = 0 keine Steigung von Null und beim mittleren Bild wäre die Steigung bei z.B. x = 2 negativ.

   Beim unteren Graphen wird durch den linken Graphen das Steigungsverhalten richtig dargestellt. Beim mittleren Bild hätte man z.B. bei x = 0 eine Steigung von -2 und beim rechten Bild hätte man z.B. bei x = -4 eine Steigung von Null.