Jochen Weber

Aufgaben zu Anwendungen zur Vektorrechnung

1 Von einer Strecke AB mit dem Mittelpunkt M sind bekannt:
A(2/5) und M(-4/3).
Berechnen Sie B.

2 Die Punkte A(3/7) und B(11/-1) sind gegenüberliegende Ecken eines Rechtecks.
Berechnen Sie den Mittelpunkt des Rechtecks.

3 Die Punkte A(1/1), B(2/2) und C(3/-1) sind drei aufeinanderfolgende Ecken eines Parallelogramms.
Berechnen Sie die vierte Ecke.

4.0 Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die beiden aufeinanderfolgenden Eckpunkte A und B und den Diagonalenschnittpunkt M.
Berechnen Sie C und D.

4.1 A(-4/0), B(4/-2), M(2/1,5)

4.2 A(2/1/-3), B(6/-3/5), M(2,5/0,5/1)

5 Die Punkte D(-2/1), E(2/3) und F(4/-1) sind die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks ABC.
Berechnen Sie die Eckpunkte des Dreiecks.

6.0 Gegeben ist das Viereck ABCD mit A(4/-2/5), B(7/9/-4), C(9/12/-2), D(6/1/7).

6.1 Beweisen Sie, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.

6.2 Berechnen Sie den Mittelpunkt des Vierecks.

6.3 Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ACD.

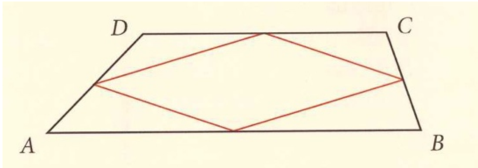
7 Vom Dreieck ABC sind die Ecken A(1/1), B(4/7) und der Schwerpunkt S(1/4) gegeben.
Berechnen Sie C.

8.0 Ein Dreieck hat die Eckpunkte A(t/-2t/-2t), B(-1/3+t/-4) und C(-2/t/4) mit $t \in \mathbb{R}$.

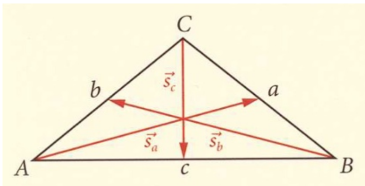
8.1 Prüfen Sie, ob es Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass M_1(1/1/1) oder M_2(2/-1/-7) der Mittelpunkt der Strecke [AB] ist.

8.2 Prüfen Sie, ob es Zahlen $t \in \mathbb{R}$ gibt, dass S_1(-1/1/0) oder S_2(-1/2/0) der Schwerpunkt vom Dreieck ABC ist.

9 Zeigen Sie, dass die Mittelpunkte der Seiten eines beliebigen Vierecks die Eckpunkte eines Parallelogramms bilden.



10 Zeigen Sie, dass die vektorielle Summe der Seitenhalbierenden eines Dreiecks null ergibt.



11.0 Gegeben ist eine Pyramide mit rechteckiger Grundfläche durch folgende Punkte.
Grundfläche: $P_1(2/1/1)$, $P_2(7/1/1)$, $P_3(7/5/1)$, $P_4(2/5/1)$
Spitze: $P_5(4{,}5/3/6)$

11.1 Zeichnen Sie die Pyramide in ein Koordinatensystem.

11.2 Berechnen Sie die Spaltenvektoren $\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_2P_3}, \overrightarrow{P_3P_4}, \overrightarrow{P_4P_5}, \overrightarrow{P_1P_3}$ und $\overrightarrow{P_4P_2}$.

11.3 Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung von $\overrightarrow{P_1P_3}, \overrightarrow{P_4P_5}$ und $\overrightarrow{P_2P_5}$.
Ergänzen Sie diese drei Vektoren in der schon angefertigten Zeichnung.

11.4 Berechnen Sie $\left|\overrightarrow{P_2P_5}\right|$ und beschreiben Sie die Bedeutung dieser Zahl.

11.5 Berechnen Sie den Spaltenvektor $\overrightarrow{0M}$ vom Ursprung zum Mittelpunkt der Grundfläche. Zeichnen Sie den Vektor ein.

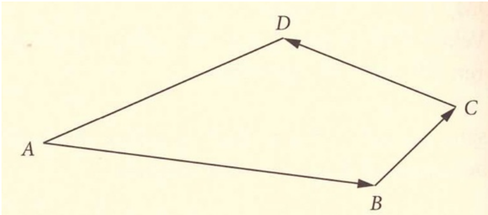
11.6 Geben Sie die Höhe der Pyramide an.

11.7 Berechnen Sie den Flächeninhalt der Grundfläche der Pyramide.

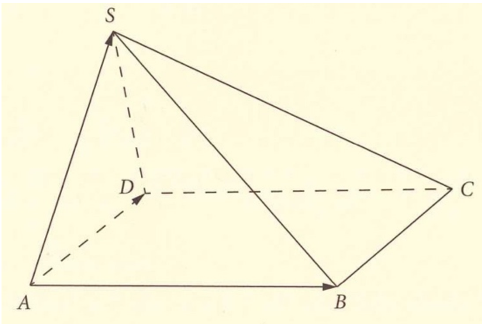
12 Die Verbindungsstrecke zwischen zwei Seitenmittelpunkten eines Dreiecks nennt man Mittelparallele.
Zeigen Sie, dass jede Mittelparallele eines Dreiecks halb so lang ist wie die zugehörige Seite.

13* Der Punkt C(7/6/9) hat bezüglich der drei Koordinatenachsen des Koordinatensystems einen zugehörigen Spiegelpunkt.
Bestimmen Sie die Koordinaten aller drei Spiegelpunkte.

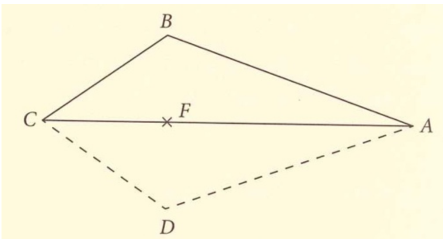
14 Ein beliebiges Viereck ABCD ist gegeben durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}$ und $\overrightarrow{CD}$.
Drücken Sie $\overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{DB}$ durch die gegebenen Vektoren aus.



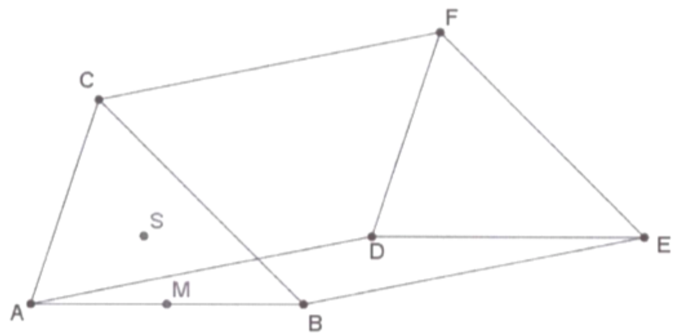
15 Eine schiefe Pyramide mit der Spitze S besitzt die rechteckige Grundfläche ABCD und ist durch die Vektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}$ und $\overrightarrow{AS}$ festgelegt.
Drücken Sie die Vektoren $\overrightarrow{BS}, \overrightarrow{CS}, \overrightarrow{DS}, \overrightarrow{CA}$ und $\overrightarrow{DB}$ durch die drei gegebenen Vektoren aus.



16 Gegeben sind die Eckpunkte eines Dreiecks ABC, das sich durch einen Punkt D zu einem Drachenviereck ABCD ergänzen lässt.
Beschreiben Sie eine Abfolge von Schritten zur rechnerischen Ermittlung der Koordinaten von D, wenn der Punkt F gegeben ist.



17 Das Dreieck ABC hat den Schwerpunkt S, somit gilt: $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MC}$. M ist dabei der Mittelpunkt der Strecke $\overline{AB}$. Das Dreieck ABC dient als Grundfläche des abgebildeten Prismas.



Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \overrightarrow{AB}, \vec{b} = \overrightarrow{AD}$ und $\vec{c} = \overrightarrow{BF}$.

Stellen Sie den Vektor $\overrightarrow{MS}$ als Linearkombination von $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ dar.

Lösungen

1. B(-10/1)

2. Berechne Vektor $\overrightarrow{AB}$ und davon den Mittelpunkt $\Rightarrow$ M(7/3)

3. Berechne Vektor $\overrightarrow{AB}$. Der Vektor $\overrightarrow{DC}$ muss gleich sein, da ABCD Parallelogramm ist
$\Rightarrow$ D(2/-2)

4. Ansatz: $2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ bzw. $2 \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BD}$

4.1 C(8/3), D(0/5)

4.2 C(3/0/5), D(-1/4-3)

5. Ansatz: $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{d}$, $\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{e}$, $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\vec{f}$
Durch Lösen des entstehenden Gleichungssystems erhält man dann A, B und C.
A(0/-3), B(-4/5) und C(8/1)

6.1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

6.2 $M(\frac{13}{2}/5/\frac{3}{2})$

6.3 $S(\frac{19}{3}/\frac{11}{3}/\frac{10}{3})$

7. Ansatz: $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{s}$ $\Rightarrow$ C(-2/4)

8.1

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} t-1 \\ 3-t \\ -4-2t \end{pmatrix}$$

Für $M_1(1/1/1)$ gibt es kein $t \in R$, $M_2(2/-1/-7)$ ist Mittelpunkt für t=5.

8.2

$$\vec{s}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} t-3 \\ 3 \\ -2t \end{pmatrix}$$

$S_1(-1/1/0)$ ist Schwerpunkt für t=0, für $S_2(-1/2/0)$ gibt es kein $t \in R$.

9.

Ein beliebiges Viereck wird festegelegt durch:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a} \quad \overrightarrow{BC} = \vec{b} \quad \overrightarrow{CD} = \vec{c}$

$\overrightarrow{M_1M_2} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{M_4M_3} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} \qquad \overrightarrow{AD} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$

$\overrightarrow{M_4M_3} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} - \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{M_2M_4} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{M_1M_4} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{M_1M_4} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

10.

Ein beliebiges Dreieck wird festgelegt durch:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

$\overrightarrow{AM_2} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

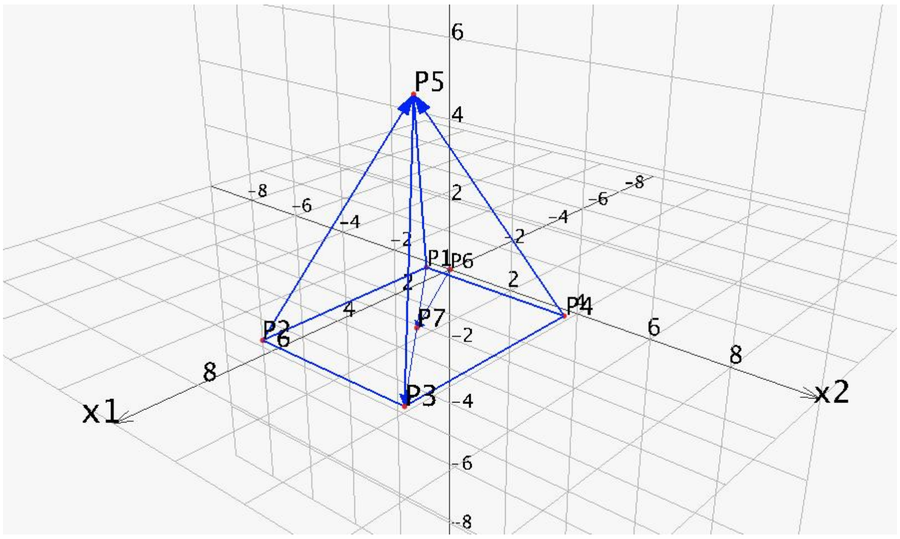
$\overrightarrow{BM_3} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$

$\overrightarrow{BM_3} = -\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{CM_1} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BA} = -\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a}$

$\overrightarrow{AM_2} + \overrightarrow{BM_3} + \overrightarrow{CM_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} - \frac{1}{2}\vec{a} = \vec{0}$

11.1



11.2 $\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_2P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_3P_4} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_4P_5} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{P_4P_2} = \begin{pmatrix} -5 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix}$

11.3

$\overrightarrow{P_1P_3}$ ist eine Diagonale der Grundfläche

$\overrightarrow{P_4P_5}$ und $\overrightarrow{P_2P_5}$ sind Seitenkanten der Pyramide

11.4

$$\left|\overrightarrow{P_2P_5}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2{,}5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6{,}25+4+25} = \sqrt{35{,}25} \approx 5{,}94$$

Die Länge einer Seitenkante der Pyramide beträgt etwa 5,94 cm.

11.5 $\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{m} = \vec{p}_1 + \frac{1}{2}\overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4{,}5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

11.6

$$\overrightarrow{MP_5} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Die Höhe der Pyramide beträgt 5 LE.

11.7 $\text{Grundfläche}_{\text{Pyramide}} = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \cdot \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right| = 5 \cdot 4 = 20 \text{ FE}$

12.

Ein beliebiges Dreieck wird festgelegt durch:

$\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ und $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$

$\overrightarrow{M_3M_2} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \vec{a} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{CA} = -\vec{b} - \vec{a}$

$\overrightarrow{M_3M_2} = -\frac{1}{2}\vec{b} - \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} = \frac{1}{2}\vec{a}$

13.

x_1 – Achse: Spiegelpunkt Z(7/0/0)

$$\vec{c}^* = \vec{z} + \overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

x_2 – Achse: Spiegelpunkt Z(0/6/0)

$$\vec{c}^* = \vec{z} + \overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \\ -9 \end{pmatrix}$$

x_3 – Achse: Spiegelpunkt Z(0/0/9)

$$\vec{c}^* = \vec{z} + \overrightarrow{CZ} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ -6 \\ 9 \end{pmatrix}$$

14. $\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{BC}$

15.

$\overrightarrow{BS} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$ $\quad$ $\overrightarrow{CS} = -\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AS}$ $\quad$ $\overrightarrow{DS} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AS}$

$\overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ $\quad$ $\overrightarrow{DB} = -\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB}$

16. Der Punkt B wird am Punkt F gespiegelt, dabei ergibt sich der Punkt D durch folgende Formel: $\vec{d} = \vec{f} + \overrightarrow{BF}$.

17 $\overrightarrow{MS} = \frac{1}{3} \cdot \overrightarrow{MC} = \frac{1}{3} \cdot \left(\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{FC} \right) = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c} - \vec{b} \right) = \frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} + \frac{1}{3}\vec{c}$