Aufgaben zu Anwendungen zur Vektorrechnung

1. Von einer Strecke AB mit dem Mittelpunkt M sind bekannt:
   A(2/5) und M(-4/3).
   Berechnen Sie B.

2. Die Punkte A(3/7) und B(11/-1) sind gegenüberliegende Ecken eines Rechtecks.
   Berechnen Sie den Mittelpunkt des Rechtecks.

3. Die Punkte A(1/1), B(2/2) und C(3/-1) sind drei aufeinanderfolgende Ecken eines Parallelogramms.
   Berechnen Sie die vierte Ecke.

4. Von einem Parallelogramm ABCD kennt man die beiden aufeinanderfolgenden Eckpunkte A und B und den Diagonalenschnittpunkt M.
   Berechnen Sie C und D.
   a) A(-4/0), B(4/-2), M(2/1,5)
   b) A(2/1/-3), B(6/-3/5), M(2,5/0,5/1)

5. Die Punkte D(-2/1), E(2/3) und F(4/-1) sind die Mittelpunkte der Seiten eines Dreiecks ABC.
   Berechnen Sie die Eckpunkte des Dreiecks.

6. Gegeben ist das Viereck ABCD mit A(4/-2/5), B(7/9/-4), C(9/12/-2), D(6/1/7).
   a) Beweisen Sie, dass das Viereck ein Parallelogramm ist.
   b) Berechnen Sie den Mittelpunkt des Vierecks.
   c) Berechnen Sie den Schwerpunkt des Dreiecks ACD.

7. Vom Dreieck ABC sind die Ecken A(1/1), B(4/7) und der Schwerpunkt S(1/4) gegeben.
   Berechnen Sie C.

8. Ein Dreieck hat die Eckpunkte A(t/-2t/-2t), B(-1/3+t/-4) und C(-2/t/4) mit $t \in R$.
   a) Prüfen Sie, ob es Zahlen $t \in R$ gibt, dass M_1(1/1/1) oder M_2(2/-1/-7) der Mittelpunkt der Strecke [AB] ist.
   b) Prüfen Sie, ob es Zahlen $t \in R$ gibt, dass S_1(-1/1/0) oder S_2(-1/2/0) der Schwerpunkt vom Dreieck ABC ist.

Lösungen

1. B(-10/1)

2. Berechne Vektor $\overrightarrow{AB}$ und davon den Mittelpunkt $\Rightarrow$ M(7/3)

3. Berechne Vektor $\overrightarrow{AB}$. Der Vektor $\overrightarrow{DC}$ muss gleich sein, da ABCD Parallelogramm ist $\Rightarrow$ D(2/-2)

4. Ansatz: $2 \cdot \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC}$ bzw. $2 \cdot \overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BD}$
   a) C(8/3), D(0/5)
   b) C(3/0/5), D(-1/4-3)

5. Ansatz: $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=\vec{d}$, $\frac{1}{2}\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{e}$, $\frac{1}{2}\left(\vec{a}+\vec{c}\right)=\vec{f}$
   Durch Lösen des entstehenden Gleichungssystems erhält man dann A, B und C.
   A(0/-3), B(-4/5) und C(8/1)

6. a) $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \\ -9 \end{pmatrix};\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

   b) $M(\frac{13}{2}/5/\frac{3}{2})$

   c) $S(\frac{19}{3}/\frac{11}{3}/\frac{10}{3})$

7. Ansatz: $\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\vec{s}$ $\Rightarrow$ C(-2/4)

8a)

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} t-1 \\ 3-t \\ -4-2t \end{pmatrix}$$

Für $M_1(1/1/1)$ gibt es kein $t \in R$, $M_2(2/-1/-7)$ ist Mittelpunkt für t=5.

$$\vec{s}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} t-3 \\ 3 \\ -2t \end{pmatrix}$$

$S_1(-1/1/0)$ ist Schwerpunkt für t=0, für $S_2(-1/2/0)$ gibt es kein $t \in R$.