Aufgaben zu Geraden

1.0 Gegeben sind die Geraden g_1, g_2 und g_3 mit den Gleichungen:

$$g_1:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-1\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix},\quad g_2:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-2\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}\ \text{und}\ g_3:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}2\\2\\-3\end{pmatrix}$$

1.1 Bestimmen Sie die Lage von g_1 und g_2 zueinander.

1.2Bestimmen Sie die Lage von g_1 und g_3 zueinander.

1.3 Bestimmen Sie die Lage von g_2 und g_3 zueinander.

2. Zeigen Sie, dass die Geraden g und h identisch sind.

$$g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\4\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}-3\\10\\12\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}3\\-6\\-9\end{pmatrix}$$

3. Stellen Sie eine Gleichung der Geraden g und h durch die Punkte A, B bzw. C, D auf und untersuchen Sie anschließend, welche Lage die Geraden zueinander haben.
A(3,5/5,5/0), B(3,5/5,5/8), C(5/3,5/0) und D(6,5/1,5/-8)

4. Zeigen Sie, dass die Geraden g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}6\\0\\-5\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-4\\1\\4\end{pmatrix}$ und h_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\a\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}5\\3\\-6\end{pmatrix}$

nicht parallel sind. Bestimmen Sie den Wert von a, für den sich die Geraden schneiden.

5.0 Bestimmen Sie, welche besondere Lage die Geraden g_1, g_2 und g_3 im Koordinatensystem haben.

5.1 g_1: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ 5.2 g_2: $\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\0\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$ 5.3 g_3: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\4\\3\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$

6.0 Ermitteln Sie, für welchen Wert von a die Geraden g und h_a parallel sind und für welchen Wert von a sie einander schneiden.

6.1 g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}4\\0\\6\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ und h_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}8\\8\\-8\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-3\\3\\a\end{pmatrix}$

6.2 g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$ und h_a: $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}a\\2\\4-a\end{pmatrix}$

Lösungen

1.1 g_1 und g_2 sind echt parallel

1.2 g_1 und g_3 schneiden sich im Punkt S(3/2/-3)

1.3 g_2 und g_3 sind windschief zueinander

2. Richtungsvektoren sind linear abhängig und z.B. Punkt P(0/4/3) $\in$ h;

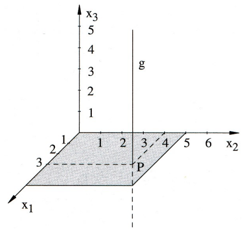
3. g(A,B): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3,5 \\ 5,5 \\ 0 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix}$ und g(C,D): $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3,5 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1,5 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}$
Die Geraden schneiden einander im Punkt S(3,5/5,5/8).

4. Die Geraden g und h_a sind nicht parallel, weil die Richtungsvektoren linear unabhängig sind.
Die Geraden schneiden sich, wenn das lineare Gleichungssystem

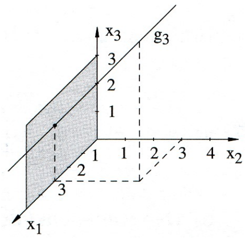
$$\begin{aligned} &(1)\quad 6 - 4k = 1 + 5s \\ &(2)\quad k = a + 3s \\ &(3)\quad -5 + 4k = 1 - 6s \end{aligned}$$

eine eindeutige Lösung hat; aus (1) und (3) $\Rightarrow$ k = 0 und s = 1
k = 0 und s = 1 einsetzen in (2) $\Rightarrow$ 0 = a + 3 $\Rightarrow$ a = -3;
Die Geraden g und h_{-3} schneiden einander im Punkt S(6/0/-5).

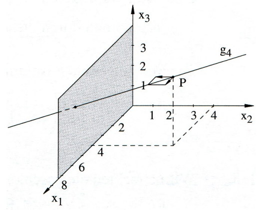
5.1 Die Gerade g_1 geht durch den Punkt P(3/4/0) und ist parallel zur x_3-Achse.



5.2 Die Gerade g_2 geht durch den Punkt (3/0/2) und ist parallel zur x_2x_3-Koordinatenebene.



5.3 Die Gerade g_3 geht durch den Punkt (4/4/3) und ist parallel zur x_1x_2-Koordinatenebene.



6.

a) Die Geraden g und h_a sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind. Also:

$\vec{u}_g = t \cdot \vec{u}_{h_a}; \quad t \in \mathbb{R}$

oder:

(1) $1 = -3t \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$

(2) $-1 = 3t \quad \Leftrightarrow \quad t = -\frac{1}{3}$

(3) $2 = a \cdot t$

$t = -\frac{1}{3}$ in (3) $2 = a \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \quad \Leftrightarrow \quad a = -6$

Für $a = -6$ sind die Geraden parallel.

Für $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$ sind die Geraden windschief. Nachweis:

(1) $4 + k = 8 - 3r$
(2) $-k = 8 + 3r$ $\oplus$
(3) $6 + 2k = -8 + a \cdot r$

Die Addition der Gleichungen (1) und (2) ergibt den Widerspruch $4 = 16$. Daraus folgt, dass die Geraden für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{-6\}$ windschief sind.

b) Die Geraden g und h_a sind genau dann parallel, wenn ihre Richtungsvektoren linear abhängig sind. Also:

$\vec{u}_g = t \cdot \vec{u}_{h_a}; \quad t \in \mathbb{R}$

oder:

(1) $1 = a \cdot t$

(2) $1 = 2 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{2}$

(3) $2 = (4 - a) \cdot t$

$t = \frac{1}{2}$ in (1) $1 = \frac{1}{2}a \quad \Leftrightarrow \quad a = 2$

$a = 2$ und $t = \frac{1}{2}$ in (3) $2 = 2 \cdot t \quad \Leftrightarrow \quad t = 1$

Ergebnis: Es gibt keinen Wert für a, sodass die Geraden parallel sind.

Wir prüfen, ob sie einen gemeinsamen Punkt haben können. Also:

(1) $1 + k = 1 + a \cdot r$
(2) $1 + k = -1 + 2r \quad \Leftrightarrow \quad k = -2 + 2r$
(3) $2 + 2k = 1 + 4r - ra$

(1)+(3) $3 + 3k = 2 + 4r$

(2) eingesetzt: $3 + 3\,(-2 + 2r) = 2 + 4r$
$\Leftrightarrow \quad 3 - 6 + 6r = 2 + 4r$
$\Leftrightarrow \quad r = 2{,}5, \quad$ also $k = 3$

In (1) $1 + 3 = 1 + a \cdot 2{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad a = \frac{6}{5}$

Für $a = \frac{6}{5}$ schneiden die Geraden einander im Punkt S $(4|4|8)$.

Für $a \in R \setminus \left\{\frac{6}{5}\right\}$ sind sie windschief zueinander.