<u>Aufgaben zu Geradenscharen</u>

1. Folgende Funktionen beschreiben Geradenscharen. Stellen Sie diese Scharen dar, indem sie die Geraden für k = -2, k = 0, k = 1 und k = 3 zeichnen.
   a) $f_k(x) = (k-1)x - 2,\ x \in R,\ k \in R$
   b) $f_k(x) = x + \sqrt{k+2},\ x \in R,\ k \in [-2;+\infty[$
   c) $f_k(x) = k \cdot \dfrac{x-2}{2},\ x \in R,\ k \in R$

2. Berechnen Sie die Achsenschnittpunkte folgender Geradenscharen.
   a) $f_t(x) = tx - 3t,\ t \in R|\{0\}$
   b) $f_t(x) = t(2x+1),\ t \in R|\{0\}$
   c) $f_t(x) = \dfrac{-3x+2}{t},\ t \in R|\{0\}$
   d) $f_t(x) = \dfrac{1}{2}tx - \dfrac{3}{4}t,\ t \in R|\{0\}$

3.0 Gegeben ist die Geradenschar g_t mit

$$g_t(x) = \frac{1}{3}(t^2-3)(x-t) + \frac{1}{9}(t^2-9),\ x \in R,\ t \in R.$$

3.1 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g_0 und g_3 in ein Koordinatensystem.

3.2 Berechnen Sie den Schnittpunkt der Geraden von g_0 und g_3.

3.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks, das von den Graphen von g_0 und g_3 und der y-Achse gebildet wird.

3.4 Geben Sie die Schnittpunkte des Graphen von g_3 mit den Koordinatenachsen an.

4.0 Gegeben ist die Geradenschar g_t mit $g_t(x) = -2tx + t^2 + 1,\ x \in R,\ t \in R|\{0\}$.

4.1 Geben Sie die Nullstelle der Funktionen in Abhängigkeit von t an.

4.2 Geben Sie die y-Achsenabschnitte in Abhängigkeit von t an.

4.3 Bestimmen Sie t so, dass der Schnittpunkt der Geraden mit der y-Achse P(0/5) ist.

4.4 Zeichnen Sie die Graphen der Funktionen g_{-1} und g_1 in ein Koordinatensystem.

4.5 Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der Graphen von g_{-1} und g_1.

5.0 Gegeben sind die beiden Punkte P(-1/t) und Q(1/-t) mit $t \in \mathbb{R}$.

5.1 Stellen Sie die Gleichung der Geraden g_t auf, die durch die beiden Punkte P und Q verläuft und beschreiben Sie die Eigenschaften all dieser Geraden.

5.2 Bestimmen Sie den Wert von t, für den die zugehörige Gerade g_t die Winkelhalbierende des I. und III. Quadranten ist.

6.0 Die Gleichung $f_m(x) = mx - m + 2$ mit dem Parameter $m \in \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ legt ein Geradenbüschel fest.

6.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Büschelpunktes.

6.2 Berechnen Sie den Wert von m, für den die zugehörige Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.

6.3 Zeichnen Sie für m = 2, für m = 0 und für m = -0,5 die zugehörigen Geraden in ein gemeinsames Koordinatensystem.

6.4 Wählen Sie zwei Geraden aus der Schar aus, die senkrecht zueinander verlaufen und geben Sie deren Gleichungen an.

6.5 Geben Sie in Abhängigkeit von m die Koordinaten der Schnittpunkte der Geraden mit der x- und der y-Achse an.

7. Alle Geraden einer Geradenschar schließen im I. Quadranten des Koordinatensystems mit den Achsen ein rechtwinkliges Dreieck mit dem Flächeninhalt 8 Flächeneinheiten ein. Bestimmen Sie die Gleichung der Geradenschar.

8.0 Eine Parallelenschar ist durch die Gleichung $f_t(x) = \frac{1}{2}x - t + 1$ mit $t \in \mathbb{R}$ und $D_{f_t} = \mathbb{R}$ gegeben.

8.1 Geben Sie den Wert von t an, für den die zugehörige Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems geht.

8.2 Berechnen Sie allgemein die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen.

8.3 Bestimmen Sie die Gleichung einer Parallelenschar, die immer senkrecht zu den Geraden der gegebenen Parallelenschar verläuft.

8.4 Berechnen Sie allgemein die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden zueinander senkrechten Geradenscharen.

9.0 Der Punkt B(-1/2) soll Büschelpunkt eines Geradenbüschels sein.

9.1 Stellen Sie die zugehörige Gleichung des Geradenbüschels auf und weisen Sie rechnerisch nach, dass B auf allen Geraden liegt.

9.2 Geben Sie die Koordinaten aller Punkte an, die auf keiner Geraden des Büschels mit der Gleichung $y = mx + m + 2$ liegen. Begründen Sie Ihre Antwort.

9.3 Bestimmen Sie alle Werte von m, für die der Abstand der zugehörigen x- und y-Achsenschnittpunkte zum Ursprung gleich sind.

10.0 Gegeben ist die Funktion f_m durch die Gleichung $f_m(x) = mx - 2m + 1$ mit $m \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und der Definitionsmenge $D = \mathbb{R}$.

10.1 Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B, der auf allen Geraden der Schar liegt.

10.2 Berechnen Sie allgemein die Nullstelle von f_m und bestimmen Sie den Wert von m, für den die zugehörige Gerade durch den Ursprung des Koordinatensystems verläuft.

10.3 Bestimmen Sie den Wert von m, für den die zugehörige Gerade senkrecht zur Geraden mit der Gleichung $y = 2x + 2$ verläuft und berechnen Sie die Koordinaten des gemeinsamen Punktes der beiden Geraden.

10.4 Erstellen Sie eine Gleichung eines Geradenbüschels, dessen Geraden durch den Punkt P(0/1) verlaufen und für jeden Wert von $m \neq 0$ parallel zu den Geraden von f_m sind.

10.5 Zeichen Sie die Graphen der Funktionen f_{-2}, f_{-1}, f_1 und f_2 in ein gemeinsames Koordinatensystem.

11.0 Geben Sie eine mögliche Funktionsgleichung an.

11.1 Die zugehörige Gerade schneidet die y-Achse im positiven Bereich und die x-Achse an der Stelle x = 2.

11.2 Die zugehörige Gerade verläuft nur durch den I. und II. Quadranten.

11.3 Die zugehörige Gerade verläuft nur durch den I. und III. Quadranten.

11.4 Die zugehörige Gerade schneidet die x-Achse an der Stelle x = -2 und hat keinen Schnittpunkt mit der y-Achse.

12. Bei einem Rechteck verhalten sich die Längen der Seiten wie 5:2. Der Umfang des Rechtecks beträgt 35 cm.
Berechnen Sie die Maße des Rechtecks.

13. Ein PKW fährt mit einer konstanten Geschwindigkeit von 80 km/h. Ein zweiter PKW fährt mit 85 km/h zwei Minuten später los.
Bestimmen Sie, nach welcher Strecke der zweite PKW den ersten PKW eingeholt hat.

14.0 Der Online-Dienst A bietet für 18,00 € monatliche Grundgebühr einen Zugang zum Internet incl. 5 Freistunden an. Jede weitere Nutzerstunde kostet 6,00 €. Der Provider B verlangt keine Grundgebühr, jedoch 8,50 € pro Stunde.

14.1 Berechnen Sie die Kosten für 12 Stunden Internet-Nutzung in einem Monat bei beiden Anbietern.

14.2 Ermitteln Sie die Online-Zeit, bei der die Kosten bei beiden Anbietern gleich sind.

15.0 Beim Sommerfest der Tageseinrichtung „Abenteuerwelt“ wird das neue zylinderförmige Planschbecken für die großen Kinder eingeweiht. Es hat einen Durchmesser von 2,40 m und die Seitenwände sind 75 cm hoch.
Die Praktikantin Samira soll dafür sorgen, dass bis zum Festbeginn um 15:00 Uhr das Becken bis 15 cm unter den Rand mit Wasser gefüllt ist. Dafür steht ihr ein Wasserschlauch zur Verfügung, mit dem pro Minute 12,5 l Wasser eingelassen werden können.

15.1 Berechnen Sie die benötigte Wassermenge.

15.2 Geben Sie die Gleichung einer Funktion f an, die die eingefüllte Wassermenge in Abhängigkeit von der verstrichenen Zeit darstellt.

15.3 Prüfen Sie durch Rechnung, ob es ausreicht, wenn Samira um 12:00 Uhr mit dem Befüllen des Planschbeckens beginnt.

16. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der folgenden linearen Gleichungen in Abhängigkeit von a.

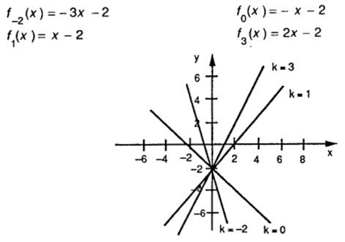
a) $\frac{1}{3}(3ax-2)=3x+1$

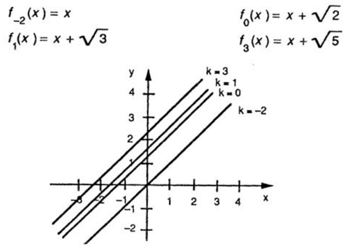
b) $ax+2=\frac{1}{2}(4x-a)$

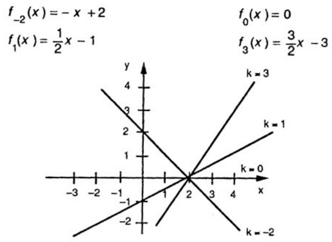
c) $2ax=6a-24a^2$

Lösungen

Aufgabe 1)







2a) Schnittpunkt mit der x-Achse (Nullstelle): Ansatz: y = 0

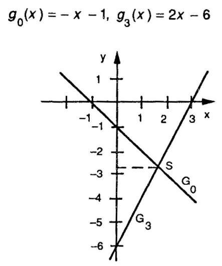
$$tx - 3t = 0 \quad \Rightarrow tx = 3t \quad \Rightarrow x = 3 \quad \Rightarrow N(3/0)$$

Schnittpunkt mit der y-Achse: Ansatz: x = 0

$$y = t \cdot 0 - 3t = -3t \quad \Rightarrow S_y(0/-3t)$$

2b) N(-0,5/0) $S_y(0/t)$ 2c) $N(\frac{2}{3}/0)$ $S_y(0/\frac{2}{t})$ 2d) $N(\frac{3}{2}/0)$ $S_y(0/-\frac{3}{4}t)$

3.1



3.2 Ansatz: $g_0(x) = g_3(x)$

$$-x - 1 = 2x - 6 \quad \Rightarrow 5 = 3x \quad \Rightarrow x = \frac{5}{3}$$

$$y = -\frac{5}{3} - 1 = -\frac{8}{3} \quad \Rightarrow S(\frac{5}{3}/-\frac{8}{3})$$

3.3 $A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h \quad \Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot \frac{5}{3} = \frac{25}{6} \ FE$

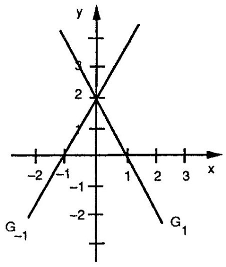
3.4 N(3/0) $S_y(0/-6)$

4.1 $g_t(x) = 0 \quad \Rightarrow -2tx + t^2 + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = \frac{t^2+1}{2t}$

4.2 $y = t^2 + 1$

4.3 $t^2 + 1 = 5 \quad \Rightarrow t^2 = 4 \quad \Rightarrow t = \pm 2$

4.4 $g_{-1}(x) = 2x + 2 \qquad g_1(x) = -2x + 2$



4.5

$$2x + 2 = -2x + 2 \quad \Rightarrow 4x = 0 \quad \Rightarrow x = 0$$
$$\Rightarrow y = 2 \cdot 0 + 2 = 2 \quad \Rightarrow S(0/2)$$

5.1

$$m = \frac{-t - t}{1-(-1)} = -t \qquad \Rightarrow g_t(x) = -tx + b$$
$$P(-1/t) \text{ einsetzen: } t = -t(-1) + b \quad \Rightarrow b = 0$$
$$\Rightarrow g_t(x) = -tx$$

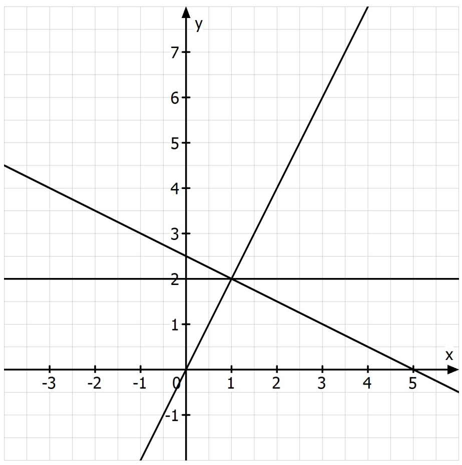
Die Geraden verlaufen alle durch den Ursprung.

5.2 $m = 1 \quad \Rightarrow -t = 1 \quad \Rightarrow t = -1$

6.1 $f_0(x) = f_1(x) \quad \Rightarrow 2 = x + 1 \quad \Rightarrow x = 1 \qquad \Rightarrow B(1/2)$

6.2 $0 = m \cdot 0 - m + 2 \quad \Rightarrow m = 2$

6.3



6.4

$$m_1 \cdot m_2 = -1$$
$$\text{Wähle } m_1 = 1 \quad \Rightarrow f_1(x) = x + 1$$
$$\Rightarrow m_2 = -1 \qquad \Rightarrow f_{-1}(x) = -x + 3$$

6.5

$S_y(0/-m+2)$ für alle $m \in \mathbb{R}$

$mx - m + 2 = 0 \quad \Rightarrow mx = m - 2 \quad \Rightarrow x = \frac{m-2}{m}$ für $m \neq 0 \;\Rightarrow N(\frac{m-2}{m}/0)$

$m = 0$: Die Gerade hat keinen Schnittpunkt mit der x-Achse

7.

$y = mx + t$

$S_y(0/t) \qquad S_x(-\frac{t}{m}/0)$ für $m \neq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} \cdot t \cdot \left(-\frac{t}{m}\right) = 8 \quad \Rightarrow -\frac{t^2}{m} = 16 \quad \Rightarrow m = -\frac{t^2}{16}$

$\Rightarrow f_t(x) = -\frac{t^2}{16} \cdot x + t \quad t \in]0;\infty]$

8.1 $\frac{1}{2} \cdot 0 - t + 1 = 0 \quad \Rightarrow t = 1$

8.2

$S_y(0/-t+1)$

$\frac{1}{2}x - t + 1 = 0 \quad \Rightarrow x = 2t - 2 \quad \Rightarrow N(2t - 2/0)$

8.3

$m_1 \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot m_2 = -1 \quad \Rightarrow m_2 = -2$

$\Rightarrow g_t(x) = -2x + t$

8.4

$\frac{1}{2}x - t + 1 = -2x + t \quad \Rightarrow 2,5x = 2t - 1 \quad \Rightarrow x = 0,8t - 0,4$

$y = -2(0,8t - 0,4) + t = -0,6t + 0,8$

$\Rightarrow S(0,8t - 0,4/-0,6t + 0,8)$

9.1

$y = mx + t$

$B(-1/2)$ einsetzen: $\; 2 = -m + t \quad \Rightarrow t = 2 + m$

$\Rightarrow g_m(x) = mx + 2 + m$

$\Rightarrow 2 = m \cdot 1 + 2 + m \quad \Rightarrow 2 = 2$ (w)

9.2 P(-1/y_P) mit $y_P \neq 2$

9.3

$S_y(0/m+2)$

$mx+m+2=0 \quad \Rightarrow mx=-m-2 \quad \Rightarrow x=\frac{-m-2}{m}$ für $m \neq 0$

$\Rightarrow m+2=\frac{-m-2}{m} \quad \Rightarrow m^2+2m=-m-2 \quad \Rightarrow m^2+3m+2=0$

$\Rightarrow m_1=-1 \qquad m_2=-2$

10.1 $f_0(x)=f_1(x) \qquad 1=x-1 \quad \Rightarrow x=2 \quad \Rightarrow B(2/1)$

10.2

$mx-2m+1=0 \quad \Rightarrow x=\frac{2m-1}{m}$ für $m \neq 0$

$m \cdot 0-2m+1=0 \quad \Rightarrow m=\frac{1}{2}$

10.3

$m_1 \cdot m_2=-1 \quad \Rightarrow 2 \cdot m_2=-1 \quad \Rightarrow m_2=-\frac{1}{2}$

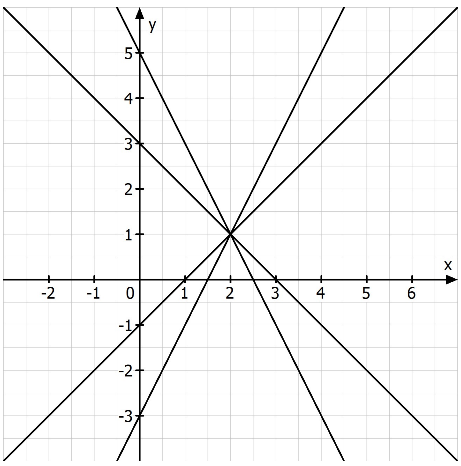
$2x+2=-\frac{1}{2}x+2 \quad \Rightarrow 2,5x=0 \quad \Rightarrow x=0 \quad \Rightarrow y=2 \quad \Rightarrow SP(0/2)$

10.4

$y=mx+t \quad P(0/1)$ einsetzen

$\Rightarrow y=mx+1$

10.5



11.1

$y=mx+t$

$N(2/0)$ einsetzen: $0=2m+t \quad \Rightarrow t=-2m$

$\Rightarrow y=mx-2m \quad$ mit $m<0$

11.2 $y=t \quad$ mit $t>0$

11.3 $y = mx \quad \text{mit } m > 0$

11.4 $x = -2$

12. Ansatz:

$$(I) \quad \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \quad \Rightarrow x = \frac{5}{2}y$$

$$(II) \quad 2x + 2y = 35$$

$$x \ \ in \ (II): \ 2 \cdot \frac{5}{2}y + 2y = 35 \quad \Rightarrow 7y = 35 \quad \Rightarrow y = 5 \quad \Rightarrow x = \frac{5}{2} \cdot 5 = 12{,}5$$

13.

x ist die Fahrzeit des ersten PKW in Stunden

$\Rightarrow$ der erste PKW legt eine Strecke von 80x zurück

$\Rightarrow$ der zweite PKW legt in dieser Zeit eine Strecke von $85(x - \frac{1}{30})$ zurück (weil er zwei Minuten später losfährt)

$\Rightarrow$ Treffpunkt: $80x = 85(x - \frac{1}{30}) \quad \Rightarrow 80x = 85x - \frac{85}{30} \quad \Rightarrow 5x = \frac{85}{30} \quad \Rightarrow x = \frac{17}{30}$

$$\Rightarrow s = 80 \cdot \frac{17}{30} = 45\frac{1}{3} \ \ km$$

14.1

$$Anbieter \ \ A: \ 18 + 7 \cdot 6 = 60€$$

$$Anbieter \ \ B: \ 12 \cdot 8{,}50 = 102€$$

14.2 x ist die Online Zeit in Stunden

$18 + 6 \cdot (x - 5) = 8{,}5x \quad \Rightarrow 18 + 6x - 30 = 8{,}5x \quad \Rightarrow x = -4{,}8$ (keine Lösung)

$18 = 8{,}5x \quad \Rightarrow x = 2{,}12$

15.1

$$V_{Zylinder} = r^2 \cdot \pi \cdot h = (12)^2 \cdot \pi \cdot 6 = 2714{,}34 \text{ dm}^3$$

Es werden etwa 2714,34 Liter Wasser benötigt.

15.2 $f(x) = 12{,}5x \quad x \text{ in Minuten}$

15.3

$12{,}5x = 2714{,}34 \quad \Rightarrow x = 217{,}15$ Minuten (3,62 Stunden)

Es reicht nicht aus, wenn Samira um 12:00 Uhr mit dem Befüllen beginnt.

16a)

$$\frac{1}{3}(3ax-2)=3x+1 \quad \Rightarrow ax-\frac{2}{3}=3x+1 \quad \Rightarrow ax-3x=\frac{5}{3}$$

$$\Rightarrow (a-3)x=\frac{5}{3} \quad \Rightarrow x=\frac{5}{3(a-3)}$$

$$a\neq 3: \; L=\left\{\frac{5}{3(a-3)}\right\} \qquad a=3: \; L=\{\ \}$$

16b)

$$ax+2=\frac{1}{2}(4x-a) \quad \Rightarrow ax+2=2x-\frac{1}{2}a \quad \Rightarrow ax-2x=-\frac{1}{2}a-2$$

$$\Rightarrow (a-2)x=-\frac{1}{2}a-2 \quad \Rightarrow x=\frac{-\frac{1}{2}a-2}{a-2}$$

$$a\neq 2: \; L=\left\{\frac{-\frac{1}{2}a-2}{a-2}\right\} \qquad a=2: \; L=\{\ \}$$

16c)

$$2ax=6a-24a^2 \quad \Rightarrow x=3-12a$$

$$a\neq 0: \; L=\{3-12a\} \qquad a=0: \; L=R$$