Aufgaben zur Berechnung von Grenzwerten

1. Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen für $x \to \pm\infty$.

a) $f(x) = \dfrac{2x^3 - 4}{x^2 + 1}$ b) $f(x) = \dfrac{5}{\sqrt{x} + 8}$ c) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 4}{2x + 2} - 3x$

d) $f(x) = \dfrac{2 + x}{|x|}$ e) $f(x) = \dfrac{x + 2}{x}$ f) $f(x) = \dfrac{x}{x + 2}$

2. Untersuchen Sie das Verhalten der Funktion $f(x) = \dfrac{5x - 6}{2x - 2}$ für $x \to \pm\infty$.

Bestimmen Sie S so, dass der Abstand des Funktionsgraphen zum Grenzwert kleiner als $\dfrac{1}{30}$ ist.

3. Berechnen Sie die Grenzwerte der folgenden Funktionen.

a) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 4x}{x}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2}$ c) $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 2x - 4)$

4. Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen in der Umgebung der Definitionslücke.

a) $f(x) = \dfrac{5x^2 - 5}{x - 1}$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 10x + 25}{x - 5}$ c) $f(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x + 3}$

5. Untersuchen Sie das Verhalten der folgenden Funktionen an den Rändern des Definitionsbereichs.

a) $f(x) = \dfrac{x - 1}{x^2} - 1$ b) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 2}{x - 2}$

Lösungen

1a) $f(x) \to \infty$ für $x \to \infty$

$f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

1b) Es existiert nur der Grenzwert für $+\infty$ und dieser ist 0.

1c) $f(x) = \dfrac{6x^2 + 4 - 6x^2 - 6x}{2x+2} = \dfrac{4-6x}{2x+2} \Rightarrow$ Der Grenzwert ist - 3 .

1d) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2+x}{x} & \text{für } x > 0 \\ -\dfrac{2+x}{x} & \text{für } x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 1 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1 \end{array}$

1e) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x+2}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x(1+\frac{2}{x})}{x} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} (1+\dfrac{2}{x}) = 1$

1f) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{2x+1} = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{x}{x(2+\frac{1}{x})} = \dfrac{1}{2+\frac{1}{x}} = \dfrac{1}{2}$

2)

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{5x-6}{2x-2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x(5-\frac{6}{x})}{x(2-\frac{2}{x})} = \frac{5-\frac{6}{x}}{2-\frac{2}{x}} = \frac{5}{2}$$

$$\left|\frac{5x-6}{2x-2} - \frac{5}{2}\right| < \frac{1}{30} \quad \Leftrightarrow \quad \left|\frac{-1}{2x-2}\right| < \frac{1}{30}$$

1.Fall: $x \to +\infty$

$$\Rightarrow -\frac{-1}{2x-2} < \frac{1}{30} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2x-2} < \frac{1}{30} \quad \Leftrightarrow \quad 30 < 2x-2 \quad \Leftrightarrow x > 16 \quad S = 16$$

2.Fall: $x \to -\infty$

$$\Rightarrow \frac{-1}{2x-2} < \frac{1}{30} \quad \Leftrightarrow \quad -30 > 2x-2 \quad \Leftrightarrow x < -14 \quad S = -14$$

3a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^3 - 6x^2 + 4x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\cdot(x^2-6x+4)}{x} = \lim\limits_{x\to 0} (x^2 - 6x + 4) = 4$

3b) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - x - 2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x+1} = -\dfrac{1}{3}$

3c) $f(x) \to \infty$ *für* $x \to -\infty$

4a)

$$D_f = R|\{1\}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 1}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{\substack{< \\ x\to 1}} (5(x+1)) = 10_-$$

$$ebenso: \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} \frac{5(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{\substack{> \\ x\to 1}} (5(x+1)) = 10_+$$

4b)

$$D_f = R|\{5\}$$

$$\lim_{\substack{< \\ x\to 5}} f(x) = \lim_{\substack{< \\ x\to 5}} \frac{(x-5)(x-5)}{x-5} = \lim_{\substack{< \\ x\to 5}} (x-5) = 0_-$$

$$ebenso: \lim_{\substack{> \\ x\to 5}} f(x) = \lim_{\substack{> \\ x\to 5}} \frac{(x-5)(x-5)}{x-5} = \lim_{\substack{> \\ x\to 5}} (x-5) = 0_+$$

4c) D = R \ {- 3}

Zähler kann nicht faktorisiert werden;

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -3}} \frac{2x^2+1}{x+3}$ existiert nicht

f(x) $\to$ -∞ für $x \overset{<}{\to} -3$

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -3}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -3}} \frac{2x^2+1}{x+3}$ existiert nicht

f(x) $\to$ ∞ für $x \overset{>}{\to} -3$

5a)

$$f(x) = \frac{x-1}{x^2} - 1 = \frac{-x^2+x-1}{x^2} \qquad D_f = \mathbb{R}|\{0\}$$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 0}} \frac{-x^2+x-1}{x^2}$ existiert nicht f(x) $\to$ -∞ für x $\overset{<}{\to}$ 0

$\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 0}} \frac{-x^2+x-1}{x^2}$ existiert nicht f(x) $\to$ -∞ für x $\overset{>}{\to}$ 0

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-x^2+x-1}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^2(-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{x^2} = \lim_{x\to\pm\infty} (-1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}) = -1$$

5b)

$$f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2} = \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = x+1 \qquad D_f = \mathbb{R}|\{2\}$$

$\lim\limits_{\substack{< \\ x\to 2}} (x+1) = 3$ $\qquad$ $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to 2}} (x+1) = 3$

$\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)$ existiert nicht f(x) $\to$ +∞ für x $\to$ +∞

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+1)$ existiert nicht f(x) $\to$ −∞ für x $\to$ −∞