Aufgaben zu Parabeln

1.0 Die Gleichung $y = ax^2 + bx + c$ ist die Gleichung einer Parabel mit dem Scheitel S und den auf ihr liegenden Punkten P und Q.
Ermitteln Sie jeweils die Werte der Formvariablen a, b und c.

1.1 a = 4; S(-2/-5)
1.2 c = -2; P(2/3); Q(-1/4)
1.3 a = 2; P(4/0); b = c
1.4 b = 2; S(3/5)

2.0 Bestimmen Sie die Nullstellen der folgenden Parabeln.

2.1 $y=\frac{1}{4}x^2-1$ 2.2 $y=3x^2-4x+2{,}5$ 2.3 $y=2x^2+6x+4{,}5$

3.0 Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, die die Koordinatenachsen in den Punkten schneidet.

3.1 A(0/-16), B(2/0) und C(-4/0)

3.2 A(0/-1), B(5/0) und C(-1/0)

4 Zeigen Sie durch Rechnung t so, dass die Gerade g: $y = 4x + 17$ eine Tangente an die Parabel mit der Gleichung p: $y = -x^2 – 4x + 1$ ist und berechnen Sie die Koordiaten des Berührpunktes.

5.0 Bestimmen Sie die Anzahl der gemeinsamen Punkte der Funktionen.

5.1 $p_1: y=x^2+2$ und $p_2: y=x^2-2x+5$
5.2 $p_1: y=x^2-3x$ und $p_2: y=-x^2+x+6$

6.0 Von einer quadratischen Funktion sind der Leitkoeffizient a und die Nullstellen bekannt. Geben Sie die Funktionsgleichung in der Produktform, der allgemeinen Form und der Scheitelpunktform an.

6.1 $a=1;\quad x_1=-1;\quad x_2=3$

6.2 $a=1{,}5;\quad x_1=1;\quad x_2=5$

6.3 $a=-2;\quad x_1=2;\quad x_2=2$

6.4 $a=\frac{2}{3};\quad x_1=1{,}5;\quad x_2=7{,}5$

7.0 Entscheiden Sie, ob es sich um eine wahre oder falsche Aussage handelt.

7.1 Wenn die Nullstellen einer quadratischen Funktion sich nur durch ihr Vorzeichen unterscheiden, ist die Parabel achsensymmetrisch zur y-Achse.

7.2 Wenn die Parabel die x-Achse berührt, hat der Scheitelpunkt den x-Wert 0.

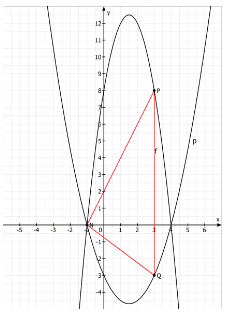
7.3 Wenn eine Parabel zwei Schnittpunkte mit der x-Achse hat und nach oben geöffnet ist, hat der Scheitelpunkt einen negativen y-Wert.

7.4 Wenn eine quadratische Funktion keine Nullstellen hat, lässt sich die Funktionsgleichung nicht in der Produktform angeben.

8.0 Gegeben sind die quadratische Funktion f mit $f(x)=-2x^2+6x+8$ und die quadratische Funktion p mit $p(x)=0{,}75x^2-2{,}25x-3$.

8.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der Schnittpunkte der zugehörigen Parabeln.

8.2* Die Gerade g mit $g(x)=2x+2$ schneidet den Graphen von f im Punkt P. Der Punkt Q liegt auf dem Graphen von p und hat die gleiche x-Koordinate wie der Punkt P.
Die Punkte N(-1/0), P und Q bilden ein Dreieck.
Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts dieses Dreiecks.



8.3 Untersuchen Sie, um wie viel Einheiten der Graph von f nach unten verschoben werden muss, damit er mit der Geraden g genau einen gemeinsamen Punkt hat.

9.0 Gegeben ist die Schar der Funktionen f_a mit $f_a(x) = ax^2 - a$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

9.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters a so, dass der Punkt A(-2/-3) auf dem Graphen von f_a liegt.

9.2 Zeigen Sie, dass die Nullstellen von f_a vom Parameter a unabhängig sind und folgern Sie aus der Lage der Nullstellen eine Aussage zur Lage des Scheitelpunktes der Parabel.

9.3 Bestätigen Sie durch Rechnung die Koordinaten des Scheitelpunktes in Abhängigkeit von a.

9.4 Geben Sie den Wert des Parameters a für den Fall an, dass der Scheitelpunkt des Graphen von f_a bei (0/3) liegt.

10.0 Gegeben ist die Schar der Funktionen p_a mit $p_a(x) = ax^2 + (1+a)x + 1$ und $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

10.1 Geben Sie an, für welche Werte des Parameters a die Scharparabel nach unten geöffnet ist.

10.2 Berechnen Sie, für welchen Wert a der Scheitel der Scharparabel auf der y-Achse liegt.

11.0 Gegeben ist eine Parabelschar p_b mit $p_b(x) = -x^2 + 2bx - 6x + 6b - 7$.

11.1 Stellen Sie die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit von b dar.

11.2 Ermitteln Sie die Gleichung der Parabel der Schar, die durch den Punkt B(-7/6) verläuft.

11.3 Die Parabel mit der Gleichung $y = -x^2 - 8x - 13$ ist eine Parabel der Schar. Berechnen Sie den Wert, den die Formvariable b für diesen Fall hat.

11.4 Weisen Sie durch Rechnung nach, dass alle Parabeln der Schar durch den Punkt A(-3/2) verlaufen.

12.0 Gegeben ist eine Schar von Funktionen f_a.

12.1 Stellen Sie die Funktionsgleichung von f_a auf, wenn sie Nullstellen bei x = -2 und x = a hat und ihr Graph kongruent ist zur nach unten geöffneten Normalparabel.

12.2 Ermitteln Sie allein mit den Angaben in Teilaufgabe 12.1 die Koordinaten des Scheitelpunktes der Scharparabeln in Abhängigkeit vom Parameter a.
Geben Sie dann die Gleichung der Funktion in der Scheitelpunktform und in der allgemeinen Form an.
(Teilergebnis: $f_a(x) = -x^2 + (a-2)x + 2a$)

Lösungen

1.1 $y=4x^2+bx+c$

$y=4(x+2)^2-5=4(x^2+4x+4)-5=4x^2+16x+16-5=4x^2+16x+11$

$\Rightarrow b=16 \qquad c=11$

1.2 $y=ax^2+bx-2$

$P(2/3)\Rightarrow 3=4a+2b-2 \Rightarrow 5=4a+2b$

$Q(-1/4)\Rightarrow 4=a-b-2 \Rightarrow 6=a-b$

(I) $5=4a+2b$

(II) $6=a-b \qquad \Rightarrow a=6+b$

$a=6+b$ in (I): $5=4(6+b)+2b \quad \Rightarrow 5=24+4b+2b \Rightarrow 6b=-19$

$\Rightarrow b=-\frac{19}{6}$

$\Rightarrow a=6-\frac{19}{6}=\frac{17}{6}$

1.3 $y=2x^2+bx+b$

$P(0/4)\Rightarrow 0=2\cdot 16+4b+b \Rightarrow 0=32+5b \Rightarrow b=-\frac{32}{5}=-6,4=c$

1.4 $y=a(x-3)^2+5 \quad \Rightarrow y=a(x^2-6x+9)+5 \Rightarrow y=ax^2-6ax+9a+5$

$\Rightarrow -6a=2 \Rightarrow a=-\frac{1}{3}$

$\Rightarrow c=9\cdot(-\frac{1}{3}+5)=-3+5=2$

2.1 $N_1(2/0)$ und $N_2(-2/0)$ 2.2 keine Nullstellen 2.3 $N(-\frac{3}{2}/0)$

3.1 Ansatz: $y = ax^2 + bx + c$ und dann die Punkte A,B und C einsetzen

(I) $-16 = c$

(II) $0 = 4a + 2b + c$

(III) $0 = 16a - 4b + c$

$\Rightarrow$ $a = 2$ und $b = 4$ $\Rightarrow$ $y = 2x^2 + 4x - 16$

3.2 gleicher Ansatz wie bei 3.1

$\Rightarrow \; y=\frac{1}{5}x^2-\frac{4}{5}x-1$

4. Gleichsetzen der Geraden und der Parabel $\Rightarrow$

$$-x^2-4x+1=4x+17$$
$$-x^2-8x-16=0$$
$$x_{1/2}=\frac{8\pm\sqrt{64-4\cdot(-1)\cdot(-16)}}{-2}=\frac{8\pm\sqrt{0}}{-2}=-4$$

$\Rightarrow$ g ist Tangente an die Parabel $\Rightarrow y=4\cdot(-4)+17=1 \Rightarrow BP(-4/1)$

5.1 Ein Schnittpunkt: S(1,5/4,25)

5.2 Zwei Schnittpunkte: $S_1(-1/4)$ und $S_2(3/0)$

6.1 $y=(x+1)(x-3)$ $\quad y=x^2-2x-3$ $\quad y=(x-1)^2-4$

6.2 $y=1{,}5(x-1)(x-5)$ $\quad y=1{,}5x^2-9x+7{,}5$ $\quad y=1{,}5(x-3)^2-6$

6.3 $y=-2(x-2)(x-2)=-2(x-2)^2$ $\quad y=-2x^2-8x-8$ $\quad y=-2(x-2)^2$

6.4 $y=\frac{2}{3}(x-1{,}5)(x-7{,}5)$ $\quad y=\frac{2}{3}x^2-6x+7{,}5$ $\quad y=\frac{2}{3}(x-4{,}5)^2-6$

7.1 Richtig.

7.2 Falsch, $y=(x-1)^2$ berührt die x-Achse und der Scheitlepunkt hat den x-Wert 1.

7.3 Richtig.

7.4 Richtig.

8.1

$$-2x^2+6x+8=0{,}75x^2-2{,}25x-3 \quad \Rightarrow -2{,}75x^2+8{,}25x+11=0$$
$$\Rightarrow x_1=-1{,}04 \quad x_2=4{,}71$$
$$y_1=-0{,}40 \quad \Rightarrow S_1(-1{,}04/-0{,}40)$$
$$y_2=-8{,}11 \quad \Rightarrow S_2(4{,}71/-8{,}11)$$

8.2

$$-2x^2+6x+8=2x+2 \quad \Rightarrow -2x^2+4x+6=0$$
$$\Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=3$$
$$\Rightarrow y_1=0 \quad y_2=8 \qquad \Rightarrow SP_1(-1/0) \quad P(3/8)$$
$$\Rightarrow Q(3/p(3)) \quad \Rightarrow Q(3/-3)$$
$$A_{Dreieck}=\frac{1}{2}\cdot(3-(-1))\cdot(8-(-3))=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 11=22$$

8.3

$-2x^2+6x+t=2x+2 \quad \Rightarrow -2x^2+4x+t-2=0$

$D=16-4(-2)(t-2)=8t \quad \Rightarrow 8t=0 \quad \Rightarrow t=0$

Der Graph von f müsste um 8 Einheiten nach unten verschoben werden.

9.1 $a(-2)^2-a=-3 \quad \Rightarrow 3a=-3 \quad \Rightarrow a=-1$

9.2

$ax^2-a=0 \quad \Rightarrow x^2=1 \quad \Rightarrow x_1=-1 \quad x_2=1$ unabhängig von a

Der Scheitelpunkt muss damit auf der y-Achse liegen.

9.3 $x_s=-\frac{0}{2a}=0 \quad y_s=a\cdot 0^2-a=-a \quad \Rightarrow S(0/-a)$

9.4 $a=-3$

10.1 $a<0$

10.2 $x_S=-\frac{1+a}{2a}=0 \quad \Rightarrow 1+a=0 \quad \Rightarrow a=-1$

11.1

$x_S=-\frac{2b-6}{-2}=b-3$

$y_S=-(b-3)^2+2b(b-3)-6(b-3)+6b-7=$

$=-b^2+6b-9+2b^2-6b-6b+18+6b-7=b^2+2$

$\Rightarrow S(b-3/b^2+2)$

11.2

$-(-7)^2+2b(-7)-6(-7)+6b-7=6$

$-49-14b+42+6b-7=6 \quad \Rightarrow -8b-14=6 \quad \Rightarrow b=-2,5$

$\Rightarrow p_{-2,5}(x)=-x^2-11x-22$

11.3

(I) $2b-6=-8 \quad \Rightarrow b=-1$

(II) $6b-7=-13 \quad \Rightarrow b=-1$

11.4

$-(-3)^2+2b(-3)-6(-3)+6b-7=-9-6b+18+6b-7=2$

$\Rightarrow$ alle Scharparabeln haben den Punkt (-3/2) gemeinsam

12.1 $f_a(x)=-(x+2)(x-a)=-x^2-2x+ax+2a$

12.2

$$x_S = \frac{-2+a}{2} = -1+\frac{1}{2}a$$

$$y_S = -(-1+\frac{1}{2}a+2)(-1+\frac{1}{2}a-a) = -(1+\frac{1}{2}a)(-1-\frac{1}{2}a) = \frac{1}{4}a^2+a+1$$

$$\Rightarrow S\left(-1+\frac{1}{2}a \,/\, \frac{1}{4}a^2+a+1\right)$$

$$\Rightarrow f_a(x) = -\left(x+1-\frac{1}{2}a\right)^2+\frac{1}{4}a^2+a+1$$

$$\Rightarrow f_a(x) = -x^2-2x+ax+2a$$