Aufgaben zu Exponential- und Logarithmusgleichungen

1. Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen durch Probieren.

a) $3^x = 729$ b) $2^x = 1024$ c) $2^x = \frac{1}{512}$ d) $6^x = 1$

e) $1{,}5^x = 3{,}375$ f) $\left(\frac{5}{2}\right)^x = \frac{2}{5}$ g) $\left(\frac{3}{4}\right)^{2x} = \frac{27}{64}$ h) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2x} = 512$

2. Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen durch Exponentenvergleich.

a) $2^5 \cdot 2^{x-1} = 16$ b) $2^{3x-1} = 4^{x+1}$ c) $4^{3x-1} \cdot 2^{4x} = 8^{-x+4}$

d) $10^{-2(x+1)} = 0{,}01^{5x+3}$ e) $\frac{1}{64} = 8^{4x+0,5}$ f) $\left(\frac{1}{4}\right)^{x+7} = 2^{2x}$

3. Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen durch Substitution.

a) $2 \cdot 5^{2x} - 52 \cdot 5^x = -50$ b) $2^{2x} - 12 \cdot 2^x + 32 = 0$ c) $10^{2x} - 100{,}1 \cdot 10^x = -10$

4. Lösen Sie folgende Exponentialgleichungen auf 4 Dezimalstellen nach dem Komma.

a) $6^x = 44$ b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0{,}2$ c) $7^{2x} = 100$ d) $2^{x-1} = 35$

e) $0{,}05^{-x} = 9$ f) $2^{-x+1} = 398$ g) $5^{3x-3} = 200$ h) $0{,}04^{2x-1} = 10$

5. Zerlegen Sie folgende Terme.

a) $\log_b(x^3 y^2 z^4)$ b) $\log_b 4x^2(x-y)^3$ c) $\log_b \frac{5m^3 n^4}{3p^2}$

d) $\log_b \frac{2\sqrt[4]{q}}{3}$ e) $\log_b(3x^3 \cdot \frac{5y}{6z})$ f) $\log_b \frac{1}{r^2 s^3 t^4}$

6. Fassen Sie folgende Terme zusammen.

a) $\frac{1}{2} \cdot \log_b x^3 - \log_b x - 3 \cdot \log_b x$ b) $m \cdot \log_b u + \frac{n}{3} \cdot \log_b v - \frac{m}{n} \cdot \log_b w$

c) $-5 \cdot \log_b b + \log_b 1 + \frac{1}{2} \cdot \log_b b^3$

d) $3 \cdot \log_b(x+y) + 2 \cdot \log_b(x-y) - 4 \cdot \log_b(x^2 - y^2)$

e) $\frac{1}{3} \cdot \log_b(x+y) - \frac{1}{3} \cdot \log_b(x^2 - y^2) - \frac{1}{2} \cdot \log_b(x-y) + \log_b(x-y)$

f) $\frac{1}{6} \cdot (5 \cdot \log_b u - \log_b v^2) + \frac{1}{4} \cdot (\log_b w - \log_b z)$

7. Bestimmen Sie die Definitionsmenge und lösen Sie folgende Logarithmusgleichungen.

a) $\log_4 x = 0{,}5$ b) $\log_{0,5} x = 4$ c) $\log_{\sqrt{2}} x = 6$ d) $\log_{\frac{3}{4}} x = 2$

e) $\log_{\frac{2}{3}} x = -4$ f) $\log_5(x-3) = 10$ g) $\log_7(4-x) = 80$ h) $\ln(x+3) = 7{,}56$

i) $\log_4(2x+6) - \log_4(x-2) = 4$ j) $\log_3(x-3) - \log_3(x-5) = \log_3(2x-8)$

k) $\frac{1}{2} \cdot \ln 2x - \ln \frac{x}{2} = 0$ l) $\lg(x-8) + \lg(x+2) = \lg(2x+4)$

m) $\log_a x^3 + \log_a x - \log_a x^2 = 0$ n) $\log_4 x^3 = 3 + \log_4 2$

o) $\log_7(x-2) + \log_7(x+2) - \log_7(3x-10) = \log_7(x-2)$

p) $\frac{1}{4} \cdot \log_3 x - \log_3 x^2 = \log_3 \sqrt[3]{2} - \frac{1}{3} \cdot \log_3 x - \log_3 4^3$

8. Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe der Musteraufgabe.

Musteraufgabe: $2^{x+1} + 2^{x+2} = 3 \Rightarrow 2^x \cdot 2 + 2^x \cdot 2^2 = 3 \Rightarrow 2^x(2+2^2) = 3 \Rightarrow 2^x \cdot 6 = 3$

$\Rightarrow 2^x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$

a) $2^{x+1} + 2^x = 24$ b) $3^{2x+2} - 3^{2x+1} + 3^{2x} = 14$ c) $4^x - 2^{2x+1} + 4^{x+2} = 120$

9. Lösen Sie folgende Aufgaben mit Hilfe der Musteraufgabe.
(Exponentialgleichung mit verschiedenen Basen)

Musteraufgabe: $3^{2x+1} - 2^{x+1} = 2^{x+2} - 9^{x+1} \Rightarrow 3^{2x+1} - 2^{x+1} = 2^{x+2} - 3^{2(x+1)}$

$\Rightarrow 3^{2x+1} + 3^{2x+2} = 2^{x+2} + 2^{x+1} \Rightarrow 3^{2x}(3+3^2) = 2^x(2^2+2)$

$\Rightarrow 12 \cdot 3^{2x} = 6 \cdot 2^x \Rightarrow 2 \cdot 3^{2x} = 2^x \Rightarrow \lg(2 \cdot 3^{2x}) = \lg 2^x$

$\Rightarrow \lg 2 + 2x \cdot \lg 3 = x \cdot \lg 2 \Rightarrow 2x \cdot \lg 3 - x \cdot \lg 2 = -\lg 2$

$\Rightarrow x(2 \cdot \lg 3 - \lg 2) = -\lg 2 \Rightarrow x = \frac{-\lg 2}{(2\lg 3 - \lg 2)} \approx -0{,}461$

a) $3^{x+1} + 3^x = 2^{x+2}$ b) $5^x + 6^x = 6^{x+1}$ c) $4 \cdot 5^x - 2^{2x} = 4^{x+1}$

d) $24 \cdot 8^{x-1} - 27^{x+1} = 2^{3x} - 24 \cdot 3^{3x}$ e) $25^{x+1} - 18 \cdot 9^{x-1} = 20 \cdot 5^{2x} + 3^{2x}$

Lösungen

1.a) x = 6 b) x = 10 c) x = -9 d) x = 0

e) x = 3 f) x = -1 g) $x = \frac{3}{2}$ h) $x = \frac{9}{2}$

2.a) $2^{5+x-1} = 2^4 \Rightarrow 5 + x - 1 = 4 \Rightarrow x = 0$

b) $2^{3x-1} = 2^{2(x+1)} \Rightarrow 3x - 1 = 2x + 2 \Rightarrow x = 3$

c) $2^{2(3x-1)+4x} = 2^{3(-x+4)} \Rightarrow 6x - 2 + 4x = -3x + 12 \Rightarrow x = \frac{14}{13}$

d) $10^{-2(x+1)} = 10^{-2(5x+3)} \Rightarrow -2(x+1) = -2(5x+3) \Rightarrow x = -\frac{1}{2}$

e) $8^{-2} = 8^{4x+0,5} \Rightarrow -2 = 4x + 0,5 \Rightarrow x = -\frac{5}{8}$

f) $2^{-2(x+7)} = 2^{2x} \Rightarrow -2x - 14 = 2x \Rightarrow x = -\frac{7}{2}$

3.a) Substitution: $z = 5^x$

$\Rightarrow 2z^2 - 52z = -50 \Rightarrow 2z^2 - 52z + 50 = 0 \Rightarrow z = 25$ und $z = 1$

Resubstitution: $5^x = 25 \Rightarrow x = 2$

$5^x = 1 \Rightarrow x = 0$

b) Substitution: $z = 2^x$

$\Rightarrow z^2 - 12z + 32 = 0 \Rightarrow z = 8$ und $z = 4$

Resubstitution: $2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

$2^x = 4 \Rightarrow x = 2$

c) Substitution: $z = 10^x$

$\Rightarrow z^2 - 100,1z = -10 \Rightarrow z^2 - 100,1z + 10 = 0 \Rightarrow z = 100$ und $z = \frac{1}{10}$

Resubstitution: $10^x = 100 \Rightarrow x = 2$

$10^x = \frac{1}{10} \Rightarrow x = -1$

4.a) $6^x = 44 \Rightarrow x \cdot \lg 6 = \lg 44 \Rightarrow x = \frac{\lg 44}{\lg 6} \approx 2,1120$

b) $x \approx 2,3219$ c) $x \approx 1,1833$ d) $(x-1) \cdot \lg 2 = \lg 35 \Rightarrow x = \frac{\lg 35}{\lg 2} + 1 \approx 6,1293$

e) $x \approx 0,7335$ f) $x = 1 - \frac{\lg 398}{\lg 2} \approx -7,6366$ g) $x = \frac{1}{3} \cdot (3 + \frac{\lg 200}{\lg 5}) \approx 2,0973$

h) $x=\frac{1}{2}\cdot(\frac{\lg 10}{\lg 0{,}04}+1)\approx 0{,}1423$

5.a) $\log_b x^3+\log_b y^2+\log_b z^4=3\cdot\log_b x+2\cdot\log_b y+4\cdot\log_b z$

b) $\log_b 4+\log_b x^2+\log_b (x-y)^3=2\cdot\log_b 2+2\cdot\log_b x+3\cdot\log_b (x-y)$

c) $\log_b 5m^3n^4-\log_b 3p^2=\log_b 5+3\cdot\log_b m+4\cdot\log_b n-\log_b 3-2\cdot\log_b p$

d) $\log_b 2\sqrt[4]{q}-\log_b 3=\log_b 2+\frac{1}{4}\cdot\log_b q-\log_b 3$

e) $\log_b 3x^3+\log_b 5y-\log_b 6z=\log_b 3+3\cdot\log_b x+\log_b 5+\log_b y$
$-\log_b 6-\log_b z$

f) $\log_b 1-\log_b r^2s^3t^4=0-2\cdot\log_b r-3\cdot\log_b s-4\cdot\log_b t$

6.a) $\frac{3}{2}\cdot\log_b x-4\cdot\log_b x=-\frac{5}{2}\cdot\log_b x=\log_b x^{-\frac{5}{2}}=\log_b\frac{1}{\sqrt{x^5}}$

b) $\log_b\frac{u^m\cdot v^{\frac{n}{3}}}{w^{\frac{m}{n}}}=\log_b\frac{u^m\cdot\sqrt[3]{v^n}}{\sqrt[n]{w^m}}$

c) $-5+0+\frac{3}{2}\cdot\log_b b=-\frac{7}{2}$

d) $\log_b (x+y)^3+\log_b (x-y)^2-\log_b (x^2-y^2)^4=\log_b\frac{(x+y)^3(x-y)^2}{(x^2-y^2)^4}=$

$\log_b\frac{(x+y)^3(x-y)^2}{(x-y)^4(x+y)^4}=\log_b\frac{1}{(x+y)(x-y)^2}$

e) $\frac{1}{3}\cdot\log_b\frac{x+y}{(x+y)(x-y)}+\frac{1}{2}\cdot\log_b (x-y)=-\frac{1}{3}\cdot\log_b (x-y)+\frac{1}{2}\cdot\log_b (x-y)=$

$\frac{1}{6}\cdot\log_b (x-y)=\log_b\sqrt[6]{x-y}$

f) $\frac{1}{6}\cdot\log_b\frac{u^5}{v^2}+\frac{1}{4}\cdot\log_b\frac{w}{z}=\log_b\sqrt[6]{\frac{u^5}{v^2}}\cdot\sqrt[4]{\frac{w}{z}}$

7.a) $D=R^+\qquad x=4^{0,5}=\sqrt{4}=2$

b) $D=R^+\qquad x=0{,}5^4=\frac{1}{16}$

c) $D=R^+\qquad x=\sqrt{2}^6=2^3=8$

d) $D=R^+\qquad x=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$

e) $D=R^+\qquad x=\left(\frac{2}{3}\right)^{-4}=\left(\frac{3}{2}\right)^4=\frac{81}{16}$

f) $D=\left]3;\infty\right[\qquad x-3=5^{10}\Rightarrow x=5^{10}+3$

g) $D=\left]-\infty;4\right[\qquad 4-x=7^{80}\Rightarrow x=4-7^{80}$

h) $D=\left]-3;\infty\right[\qquad x+3=e^{7,56}\Rightarrow x=e^{7,56}-3\approx 1916{,}8455$

i) $D=\left]2;\infty\right[\qquad \log_4\frac{2x+6}{x-2}=4\Rightarrow\frac{2x+6}{x-2}=4^4\Rightarrow x=\frac{259}{127}\approx 2{,}0394$

j) $D =]5;\infty[$

$$\log_3 \frac{x-3}{x-5} = \log_3(2x-8) \Rightarrow \frac{x-3}{x-5} = 2x-8 \Rightarrow 2x^2 - 19x + 43 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{19 \pm \sqrt{17}}{4} \Rightarrow x \approx 3{,}7192 \quad \text{und} \quad x \approx 5{,}7808 \quad \Rightarrow L = \{5{,}7808\}$$

k) $D = R^+$ $\quad \ln \frac{\sqrt{2x}}{\frac{x}{2}} = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{2x}}{\frac{x}{2}} = 1 \Rightarrow \sqrt{2x} = \frac{x}{2} \Rightarrow 2x = \frac{x^2}{4} \Rightarrow x = 8$ und

$x = 0 \quad \Rightarrow L = \{8\}$

l) $D =]8;\infty[$ $\quad \lg(x-8)(x+2) = \lg(2x+4) \Rightarrow (x-8)(x+2) = 2x+4$

$\Rightarrow x = 10$ und $x = -2 \quad \Rightarrow L = \{10\}$

m) $D = R^+$ $\quad 3 \cdot \log_a x + \log_a x - 2 \cdot \log_a x = 0 \Rightarrow 2 \cdot \log_a x = 0 \Rightarrow x = 1$

n) $D = R^+$ $\quad \log_4 x^3 = 3 \cdot \log_4 4 + \log_4 2 \Rightarrow \log_4 x^3 = \log_4 4^3 \cdot 2$

$\Rightarrow x^3 = 128 \Rightarrow x = \sqrt[3]{128}$

o) $D = \left]\frac{10}{3};\infty\right[$ $\quad \log_7 \frac{x+2}{3x-10} = 0 \Rightarrow \frac{x+2}{3x-10} = 1 \Rightarrow x = 6$

p) $D = R^+$ $\quad \log_3 \frac{x^{\frac{1}{4}}}{x^2} = \log_3 \frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{x} \cdot 4^3} \Rightarrow x^{-\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{x^{\frac{1}{3}} \cdot 4^3} \Rightarrow x^{-\frac{17}{12}} = \frac{\sqrt[3]{2}}{64} \Rightarrow$

$$x = \left(\frac{64}{\sqrt[3]{2}}\right)^{\frac{12}{17}} = 16$$

8.a) $2^x(2+1) = 24 \Rightarrow 2^x = 8 \Rightarrow x = 3$

b) $3^{2x}(3^2 - 3 + 1) = 14 \Rightarrow 3^{2x} = 2 \Rightarrow 2x = \frac{\lg 2}{\lg 3} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lg 2}{\lg 3} \approx 0{,}3155$

c) $2^{2x} - 2^{2x+1} + 2^{2x+4} = 120 \Rightarrow 2^{2x}(1 - 2 + 2^4) = 120 \Rightarrow 2^{2x} = 8 \Rightarrow 2x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$

9.a) $3^x(3+1) = 4 \cdot 2^x \Rightarrow 3^x = 2^x \Rightarrow x \cdot \lg 3 - x \cdot \lg 2 = 0 \Rightarrow x \cdot (\lg 3 - \lg 2) = 0$

$\Rightarrow x = 0$

b) $5^x + 6^x(1-6) = 0 \Rightarrow 5^x = 5 \cdot 6^x \Rightarrow x \cdot \lg 5 = \lg 5 + x \cdot \lg 6$

$$\Rightarrow x \cdot (\lg 5 - \lg 6) = \lg 5 \Rightarrow x = \frac{\lg 5}{\lg 5 - \lg 6} \approx -8{,}8275$$

c) $4 \cdot 5^{x} = 2^{2x+2} + 2^{2x} \Rightarrow 4 \cdot 5^{x} = 2^{2x}(2^{2}+1) \Rightarrow 5^{x} = \frac{5}{4} \cdot 2^{2x}$

$\Rightarrow x \cdot \lg 5 = \lg \frac{5}{4} + 2x \cdot \lg 2 \Rightarrow x \cdot (\lg 5 - 2\lg 2) = \lg \frac{5}{4}$

$\Rightarrow x = \frac{\lg \frac{5}{4}}{\lg 5 - 2\lg 2} = 1$

d) $24 \cdot 2^{3x-3} - 3^{3x+3} = 2^{3x} - 24 \cdot 3^{3x} \Rightarrow 24 \cdot 2^{3x-3} - 2^{3x} = 3^{3x+3} - 24 \cdot 3^{3x}$

$2^{3x}(24 \cdot 2^{-3} - 1) = 3^{3x}(27-24) \Rightarrow 2 \cdot 2^{3x} = 3 \cdot 3^{3x}$

$\Rightarrow \lg 2 + 3x \cdot \lg 2 = \lg 3 + 3x \cdot \lg 3$

$\Rightarrow 3x(\lg 2 - \lg 3) = \lg 3 - \lg 2 \Rightarrow x = \frac{1}{3} \cdot \frac{\lg 3 - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3} = -\frac{1}{3}$

e) $5^{2x+2} - 18 \cdot 3^{2x-2} = 20 \cdot 5^{2x} + 3^{2x} \Rightarrow 5^{2x+2} - 20 \cdot 5^{2x} = 3^{2x} + 18 \cdot 3^{2x-2}$

$\Rightarrow 5^{2x}(25-20) = 3^{2x}(1+18 \cdot 3^{-2}) \Rightarrow 5 \cdot 5^{2x} = 3 \cdot 3^{2x} \Rightarrow 5^{2x} = \frac{3}{5} \cdot 3^{2x}$

$\Rightarrow 2x \cdot \lg 5 = \lg \frac{3}{5} + 2x \cdot \lg 3 \Rightarrow 2x(\lg 5 - \lg 3) = \lg \frac{3}{5} \Rightarrow x = \frac{1}{2} \cdot \frac{\lg \frac{3}{5}}{\lg 5 - \lg 3} = -\frac{1}{2}$