Aufgaben zu den ganzrationalen Funktionen

1. Bestimmen Sie die Nullstellen folgender ganzrationaler Funktionen.

a) $y = x^2 + x - 6$ b) $y = x^3 - 3x^2 + x$ c) $y = (x + 4)(x^2 + x - 2)$

d) $y = x^4 - 5x^2 + 4$ e) $y = x^3 + 2x^2 - 13x + 10$

f) $y = x^4 - 2x^3 - 25x^2 + 50x$ g) $y = x^4 + 6x^3 + 9x^2$

h) $y = x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{19}{2}x + 21$ i) $y = 2x^5 - 2x^4 - 3x^3 - x^2 - 2x$

j) $y = \frac{1}{8}(x^4 + 6x^2 + 8)$ k) $y = x^6 - 4x^3 - 5$

2. Die Funktion f_a: $y = x^3 - (3+a)x^2 + (3a-4)x + 4a$ mit $a \in R$ hat bei $x = 5$ eine Nullstelle. Bestimmen Sie den Wert für a und alle Nullstellen der Funktion.

3.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = -\frac{1}{4}(x^3 + kx^2 - 2kx - 8)$ mit $k \in R$.

3.1 Zeigen Sie, dass $x_1 = 2$ für alle Werte von k eine Nullstelle von f_k ist und zerlegen Sie damit den Term $f_k(x)$ in ein Produkt mit genau einem Linearfaktor.

3.2 Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Funktion f_k neben $x_1 = 2$ noch mindestens eine weitere Nullstelle besitzt. Achten Sie dabei auch auf die Sonderfälle k = -6 und k = 2.

3.3 Berechnen Sie nun k so, dass die Funktion $f_k(x)$ bei $x_2 = -2$ eine doppelte Nullstelle hat. (Abitur 2001 AII)

4. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{8}x^4 + x^3 + kx^2$ mit $k \in R \wedge k > 0$.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Fallunterscheidung Lage und Vielfachheit sämtlicher Nullstellen der Funktion f_k.
(Abitur 1999 Nachtermin)

5. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a(x) = -\frac{1}{3}\left[2x^3 - 3x^2 - (a+2)x\right] \ mit \ a \in R.$

Bestimmen Sie die Anzahl, Lagen und Vielfachheiten der Nullstellen der Funktion $f_a(x)$.
Achten Sie dabei auch auf den Sonderfall a = -2.

6. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 4kx^2 + 4k^2x) \ mit \ k \in R_0^+.$

Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktionen $f_k(x)$ und ihre Vielfachheiten in Abhängigkeit von k.

7. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = 2k^2x - 2x^3 \ mit \ k \in R.$

Bestimmen Sie die Anzahl der Nullstellen in Abhängigkeit von k.

8. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 2kx^2 + k^2x)$ mit $\mathrm{k} \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{k} \geq 0$.

Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an. (Abitur 2007 AI)

9. Gegeben ist die reelle Funktion $f_k(x) = -\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3$ mit $\mathrm{k} \in \mathrm{R} \wedge \mathrm{k} > 0$ und $\mathrm{D}_{\mathrm{f_k}} = R.$

Der Graph wird mit G_{f_k} bezeichnet. (Abitur 2008 AII)

Bestimmen Sie Lage und Vielfachheit der Nullstellen der Funktion f_k. Untersuchen Sie den Graphen G_{f_k} auf Symmetrie.

10.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $f_k(x) = x \cdot (\frac{x^2}{k} - k - 1)$ mit $\mathrm{k} \in \frown \wedge \mathrm{k} \neq 0$.

Der Graph einer solchen Funktion wird mit G_{f_k} bezeichnet. (Abitur 2009 AII)

10.1 Berechnen Sie die Nullstellen der Funktion f_k in Abhängigkeit von k. Geben Sie auch die zugehörigen Vielfachheiten an.

10.2 Bestimmen Sie die Werte von k so, dass der jeweils zugehörige Graph G_{f_k} durch den Punkt P(-3/3) geht.

11.0 Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_a(x) = -\frac{1}{8}x(x-a)(x-5)^2$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. (Abitur 2010 AI)

11.1 Bestimmen Sie in Abhängigkeit von a die Anzahl, Lage und Vielfachheit der Nullstellen von f_a.

11.2 Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$ so, dass der Punkt P(4/-0,5) auf dem Graphen der Funktion f_a liegt.

12. Gegeben sind die reellen Funktionen

$f_a(x) = \frac{1}{9}(x-a)(x^2+3x-10)$ mit $D_{f_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$. (Abitur 2011 AI)

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von a die Lage und Vielfachheiten der Nullstellen von f_a.

13.0 Gegeben sind die reellen Funktionen $g_a(x) = \frac{1}{24}(x^4 + (6a-4)x^3 + (12a^2 - 12a)x^2)$ mit $D_{g_a} = \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}^+$. (Abitur 2012 AII)

13.1 Untersuchen Sie in Abhängigkeit von a das Symmetrieverhalten von G_{g_a} bzgl. des Koordinatensystems.

13.2 Berechnen Sie, für welche Werte von a die Funktion g_a genau eine Nullstelle besitzt.

14. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_a : x \mapsto \frac{1}{12}\left(x^3 - 2ax^2 + a^2x\right)$ mit $x, a \in \mathbb{R}$ und $a \geq 0$. (Abitur 2013 AI).
Bestimmen Sie die Nullstellen von f_a und deren Vielfachheit in Abhängigkeit von a.

15. Gegeben sind die reellen Funktionen $f_t(x) = -\left(x+1\right)^2(x-t)$ $D_{f_t} = \mathbb{R}$ $t \in \mathbb{R}$.

Bestimmen Sie die Nullstellen von f_t sowie deren Vielfachheiten in Abhängigkeit von t. (Abitur 2013 AII)

16.0 Gegeben sind mit dem Parameter $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $D_{h_k} = \mathbb{R}$ die quadratischen Funktionen

$h_k : x \mapsto kx^2 + (2k-1) \cdot x + \frac{1}{4}k^2 + \frac{1}{4k}$. (Abitur 2014 AII)

16.1 Untersuchen Sie, für welchen Parameterwert k der Graph von h_k symmetrisch zum Koordinatensystem ist. Erläutern Sie Ihr Vorgehen.

16.2 Weisen Sie nach, dass $D = -k^3 + 4k^2 - 4k$ die Diskriminante der Gleichung $h_k(x) = 0$ ist.

16.3 Bestimmen Sie nun diejenigen Werte k, für die die quadratische Funktion h_k mindestens eine Nullstelle besitzt.

Lösungen

1.a) Lösungsformel $\Rightarrow$ $x_1 = 2$ und $x_2 = -3$

b) Ausklammern und dann Lösungsformel $\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ und $x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}$

c) Lösungsformel $\Rightarrow$ $x_1 = -4$, $x_2 = -2$ und $x_3 = 1$

d) Substitution $\Rightarrow$ $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -1$ und $x_4 = -2$

e) Eine Lösung durch Ausprobieren ($x_1 = 1$) und dann Polynomdivision

$\Rightarrow$ $(x - 1)(x^2 + 3x - 10)$ $\Rightarrow$ Lösungsformel $\Rightarrow$ $x_2 = -5$ und $x_3 = 2$

f) Ausklammern $\Rightarrow$ $x(x^3 - 2x^2 - 25x + 50)$ $\Rightarrow$ Lösung durch Ausprobieren ($x_2 = 2$) und dann Polynomdivision $\Rightarrow$ $(x^3 - 2x^2 - 25x + 50) = (x - 2)(x^2 - 25)$

$\Rightarrow$ $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $x_3 = 5$ und $x_4 = -5$

g) $x^2(x^2 + 6x + 9)$ $\Rightarrow$ Lösungsformel $\Rightarrow$ $x_{1/2} = 0$ und $x_{3/4} = -3$

h) Eine Lösung durch Ausprobieren ($x_1 = 2$) und dann Polynomdivision

$\Rightarrow$ $(x - 2)(x^2 - 0{,}5x - 10{,}5)$ $\Rightarrow$ Lösungsformel $\Rightarrow$ $x_1 = 2$, $x_2 = -3$ und $x_3 = 3{,}5$

i) Ausklammern $\Rightarrow$ Lösung durch Ausprobieren erraten ($x_2 = 2$) und dann Polynomdivision $\Rightarrow$ die Gleichung dritten Grades liefert wieder durch Ausprobieren eine weitere Lösung ($x_3 = -1$); führe wieder Polynomdivision durch $\Rightarrow$ löse die entstehende quadratische Gleichung mit der Lösungsformel $\Rightarrow$ keine weiteren reellen Nullstellen;

j) Substitution $\Rightarrow$ keine reellen Nullstellen

k) Substitution $\Rightarrow$ $x_1 = \sqrt[3]{5} \approx 1{,}7$ und $x_2 = -1$

2. Einsetzen der Nullstelle $\Rightarrow$ $0 = 5^3 - (3 + a)5^2 + (3a - 4)5 + 4a$ $\Rightarrow$ $6a = 30$ $\Rightarrow$ $a = 5$

Nullstellen der Funktion $y = x^3 - 8x^2 + 11x + 20$: $x_1 = 5$, $x_2 = 4$ und $x_3 = -1$

3.1 $f_k(2) = -\frac{1}{4}(2^3 + k \cdot 2^2 - 2k \cdot 2 - 8) = -\frac{1}{4}(8 + 4k - 4k - 8) = 0$

$$
\begin{array}{l}
(x^3 + kx^2 - 2kx - 8) : (x - 2) = x^2 + (k+2)x + 4 \\
\underline{-(x^3 - 2x^2)} \\
(k+2)x^2 - 2kx - 8 \\
\underline{-((k+2)x^2 - 2kx - 4x)} \\
\qquad\qquad 4x - 8 \\
\qquad\qquad \underline{-(4x - 8)} \\
\qquad\qquad ----
\end{array}
$$

$\Rightarrow f_k(x) = -\frac{1}{4}(x-2)(x^2 + (k+2)x + 4)$

3.2 Nullstellen: $f_k(x) = 0$

$\Rightarrow x_1 = 2$

$x^2 + (k+2)x + 4 = 0$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{-(k+2) \pm \sqrt{(k+2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2} = \frac{-(k+2) \pm \sqrt{k^2 + 4k - 12}}{2}$$

$D = k^2 + 4k - 12 = (k-2)(k+6)$

Mindestens eine weitere Nullstelle, wenn $D \geq 0$.

Skizze:

$D = 0: \ (k-2)(k+6) = 0 \ \Rightarrow \ k_1 = 2 \quad k_2 = -6$

$k_1 = 2 \ \Rightarrow \ x_{2/3} = -2 \ \Rightarrow$ *eine weitere Nullstelle*

$k_2 = -6 \ \Rightarrow \ x_{2/3} = 2 \ \Rightarrow$ *keine weitere Nullstelle*

$D > 0: \quad k \in \left]-\infty; -6\right[\cup \left]2; \infty\right[$

$\Rightarrow$ *für* $k \in \left]-\infty; -6\right[\cup \left[2; \infty\right[$ hat $f_k(x)$ mindestens eine weitere Nullstelle

3.3 aus Teilaufgabe b) folgt: k = 2

4. Nullstellen: $f_k(x) = 0$

$$\Rightarrow \frac{1}{8}x^2(x^2+8x+8k)=0$$

$$x_{1/2}=0$$

$$x_{3/4}=\frac{-8\pm\sqrt{64-4\cdot 1\cdot 8k}}{2}=\frac{-8\pm\sqrt{64-32k}}{2}$$

1) $64-32k=0 \Rightarrow k=2 \Rightarrow x_{1/2}=0\ (doppelte\ \ Nst.) \quad x_{3/4}=-4\ (doppelte\ Nst.)$

2) $64-32k>0 \Rightarrow 0<k<2 \Rightarrow x_{1/2}=0\ (doppelte\ \ Nst.)$

$x_3=\frac{-8+\sqrt{64-32k}}{2}$ (einfache Nullstelle) $\quad x_4=\frac{-8-\sqrt{64-32k}}{2}$ (einfache Nullstelle)

3) $64-32k<0 \Rightarrow k>2 \Rightarrow x_{1/2}=0$ (doppelte Nullstelle)

5. Nullstellen: $f_a(x) = 0$

$$\Rightarrow -\frac{1}{3}\left[2x^3-3x^2-(a+2)x\right]=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x\left[2x^2-3x-(a+2)\right]=0$$

$$\Rightarrow x_1=0 \qquad 2x^2-3x-(a+2)=0 \Rightarrow x_{2/3}=\frac{3\pm\sqrt{9-4\cdot 2\cdot(-(a+2))}}{4}=\frac{3\pm\sqrt{25+8a}}{4}$$

1) $25+8a=0 \Rightarrow a=-\frac{25}{8}\ :\ \ zwei\ \ Nullstellen$

$\Rightarrow x_1=0\ (einfache\ \ Nullstelle) \quad x_2=\frac{3}{4}\ (doppelte\ \ Nullstelle)$

2) $25+8a>0 \Rightarrow a>-\frac{25}{8}(außer\ \ a=-2):\ \ drei\ \ Nullstellen$

$\Rightarrow x_1=0\ (einfache\ \ Nullstelle) \quad x_2=\frac{3+\sqrt{25+8a}}{4}\ (einfache\ \ Nullstelle)$

$x_3=\frac{3-\sqrt{25+8a}}{4}\ (einfache\ \ Nullstelle)$

3) $25+8a<0 \Rightarrow a<-\frac{25}{8}:\ \ eine\ \ Nullstelle \ \ \Rightarrow x_1=0\ (einfache\ \ Nullstelle)$

4) $a=-2:\ -\frac{1}{3}\left[2x^3-3x^2\right]=0 \Rightarrow -\frac{1}{3}x^2(2x-3)=0 \Rightarrow zwei\ \ Nullstellen$

$\Rightarrow x_1=0\ (doppelte\ \ Nullstelle) \quad x_2=\frac{3}{2}\ (einfache\ \ Nullstelle)$

6. Nullstellen: $f_k(x) = 0$

$$\frac{1}{8}(x^3 - 4kx^2 + 4k^2x) = 0 \;\Rightarrow \frac{1}{8}x(x^2 - 4kx + 4k^2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \quad x^2 - 4kx + 4k^2 = 0 \;\Rightarrow x_{2/3} = \frac{4k \pm \sqrt{16k^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4k^2}}{2} = \frac{4k}{2} = 2k$$

1) $k = 0$: *eine Nullstelle bei* $x = 0$ (*dreifache Nullstelle*)

2) $k \in R^+$: *zwei Nullstellen bei* $x = 0$ (*einfache Nullstelle*)
und bei $x = 2k$ (*doppelte Nullstelle*)

7. Nullstellen: $f_k(x) = 0$

$$2k^2x - 2x^3 = 0 \;\Rightarrow 2x(k^2 - x^2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad k^2 - x^2 = 0 \;\Rightarrow x_2 = k \quad x_3 = -k$$

1) $k = 0$: *eine Nullstelle bei* $x = 0$ (*dreifache Nullstelle*)

2) $k \in R$ (*außer* $k = 0$): *drei Nullstellen bei* $x_1 = 0$ (*einfache Nullstelle*),
bei $x_2 = k$ (*einfache Nullstelle*) *und*
bei $x_3 = -k$ (*einfache Nullstelle*)

8.

$$f_k(x) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}(x^3 - 2kx^2 + k^2x) = 0 \quad \Rightarrow \frac{1}{3}x(x^2 - 2kx + k^2) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad x^2 - 2kx + k^2 = 0$$

$$x_{2/3} = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4 \cdot 1 \cdot k^2}}{2} = \frac{2k \pm \sqrt{4k^2 - 4k^2}}{2} = k$$

1. Fall: $k = 0$
eine Nullstelle bei $x = 0$ (dreifache Nullstelle)

2. Fall: $k \neq 0$
zwei Nullstellen bei $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle) und bei $x_2 = k$ (doppelte Nullstelle)

9.

Nullstellen: $-\frac{k^2}{16}x^4 + \frac{k}{2}x^3 = 0$

$$\Rightarrow x^3(-\frac{k^2}{16}x + \frac{k}{2}) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \qquad -\frac{k^2}{16}x + \frac{k}{2} = 0 \quad \Rightarrow x_2 = \frac{8}{k}$$

$\Rightarrow f_k(x)$ hat zwei Nullstellen bei $x = 0$ (dreifach) und bei $x = \frac{8}{k}$ (einfach)

Symmetrie:

G_{f_k} ist weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung, da unabhängig von $k > 0$ gerade und ungerade Potenzen auftreten.

10.1

$$x \cdot (\frac{x^2}{k} - k - 1) = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad \frac{x^2}{k} - k - 1 = 0 \quad \Rightarrow x^2 = k^2 + k \quad \Rightarrow x_2 = -\sqrt{k^2 + k} \quad x_3 = \sqrt{k^2 + k}$$

$D = 0: \ k^2 + k = 0 \quad \Rightarrow k(k+1) = 0 \quad \Rightarrow (k_1 = 0)$ (k $\neq$ 0 nach Voraussetzung) $\quad k_2 = -1$

$k = -1 \ \Rightarrow f_{-1}$ hat eine Nullstelle bei x = 0 (dreifach)

$D > 0: k^2 + k > 0$

Skizze von $(k^2 + k)$:

$\Rightarrow k \in]-\infty; -1[\cup]0; \infty[$

$\Rightarrow$ f_k hat drei Nullstellen bei x_1=0 (einfach), x_2=-$\sqrt{k^2 + k}$ (einfach)

und bei x_2=-$\sqrt{k^2 + k}$ (einfach)

$D < 0: k^2 + k < 0 \qquad \Rightarrow k \in]-1; 0[$

$\Rightarrow$ f_k hat eine Nullstelle bei x = 0 (einfach)

10.2

$$(-3) \cdot \left(\frac{(-3)^2}{k} - k - 1 \right) = 3 \quad \Rightarrow \frac{9}{k} - k - 1 = -1 \quad \Rightarrow 9 - k^2 - k = -k$$

$$\Rightarrow 9 - k^2 = 0 \quad \Rightarrow k_1 = -3 \qquad k_2 = 3$$

11.1

$$f_a(x) = 0 \quad \Rightarrow -\frac{1}{8} x(x-a)(x-5)^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = 0 \qquad x_2 = a \qquad x_3 = 5$$

$a = 0$: f_a hat zwei Nullstellen bei x = 0 (doppelt) und bei x = 5 (doppelt)

a = 5: f_a hat zwei Nullstellen bei x = 0 (einfach) und bei x = 5 (dreifach)

a $\in \mathbb{R} \setminus \{0; 5\}$: f_a hat drei Nullstellen bei x = 0 (einfach), bei x = a (einfach)

und be i x = 5 (doppelt)

11.2 $f_a(4) = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow -\frac{1}{8} \cdot 4 \cdot (4-a) \cdot (4-5)^2 = -\frac{1}{2} \quad \Rightarrow 4 - a = 1 \quad \Rightarrow a = 3$

12.

$f_a(x) = 0$

1) $x - a = 0 \quad \Rightarrow x = a$

2) $x^2 + 3x - 10 = 0$

$$\Rightarrow x_{2/3} = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot (-10)}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{49}}{2} = \frac{-3 \pm 7}{2}$$

$\Rightarrow x_2 = 2 \qquad x_3 = -5$

$\Rightarrow a = 2$: f_2 hat zwei Nullstellen bei $x_1 = 2$ (doppelt) und $x_2 = -5$ (einfach)

$\Rightarrow a = -5$: f_{-5} hat zwei Nullstellen bei $x_1 = 2$ (einfach) und $x_2 = -5$ (doppelt)

$\Rightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 2\}$: f_a hat drei Nullstellen bei $x_1 = a$ (einfach), bei $x_2 = 2$ (einfach) und bei $x_3 = -5$ (einfach)

13.1

$$g_a(x) = \frac{1}{24}\left(x^4 + (6a - 4)x^3 + (12a^2 - 12a)x^2\right)$$

$$a = \frac{2}{3}: g_{\frac{2}{3}}(x) = \frac{1}{24}\left(x^4 - 2\frac{2}{3}x^2\right)$$

$G_{g_{\frac{2}{3}}}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, weil nur gerade Exponenten auftreten

$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \left\{\frac{2}{3}\right\}$: G_{g_a} weder achsensymmetrisch zur y-Achse noch punktsymmetrisch zum Ursprung

13.2

$$g_a(x)=0 \;\Rightarrow \frac{1}{24}x^2\left[x^2+(6a-4)x+12a^2-12a\right]=0 \;\Rightarrow x_1=0$$

$$x^2+(6a-4)x+12a^2-12a=0$$

$$\Rightarrow x_{2/3}=\frac{-6a+4\pm\sqrt{36a^2-48a+16-4\cdot1\cdot(12a^2-12a)}}{2}=\frac{-6a+4\pm\sqrt{-12a^2+16}}{2}$$

g_a hat genau eine Nullstelle, wenn $-12a^2+16<0$

$$-12a^2+16=0 \;\Rightarrow a^2=\frac{4}{3} \;\Rightarrow (a_1=-\sqrt{\frac{4}{3}})\notin D \quad a_2=\sqrt{\frac{4}{3}} \;\Rightarrow x_{2/3}\neq 0$$

Skizze von $(-12a^2+16)$:

$$\Rightarrow a\in \left]-\infty;-\sqrt{\frac{4}{3}}\right[\cup \left]\sqrt{\frac{4}{3}};\infty\right[$$

$$\Rightarrow a\in \left]\sqrt{\frac{4}{3}};\infty\right[\text{ (da } a\in\mathbb{R}^+)$$

14.

$$f_a(x)=0 \;\Rightarrow \frac{1}{12}\left(x^3-2ax^2+a^2x\right)=0 \;\Rightarrow \frac{1}{12}x\left(x^2-2ax+a^2\right)$$

$\Rightarrow x_1=0 \qquad x^2-2ax+a^2=0 \;\Rightarrow x_{2/3}=a$

1) $a=0$: $x=0$ (dreifache Nullstelle)

2) $a>0$: $x_1=0$ (einfache Nullstelle) $\qquad x_{2/3}=a$ (doppelte Nullstelle)

15.

$$f_t(x)=-(x+1)^2(x-t)$$

$f_t(x)=0 \;\Rightarrow$ 1) $x+1=0 \Rightarrow x_1=-1$ $\qquad$ 2) $x-t=0 \Rightarrow x_2=t$

$t=-1$: f_{-1} hat eine Nullstelle bei x = -1 (dreifach)

$t\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$: f_t hat zwei Nullstellen bei $x_1=-1$ (doppelt) und bei $x_2=t$ (einfach)

16.1

$$h_k(x)=kx^2+\left(2k-1\right)x+\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{4k}$$

wegen $k\neq 0$ kann nur Achsensymmetrie vorliegen

$\Rightarrow 2k-1=0$ (weil nur gerade Exponenten auftauchen dürfen)

$\Rightarrow k=0{,}5 \qquad \Rightarrow G_{h_{0,5}}$ achsensymmetrisch zur y-Achse,

weil auch die Definitionsmenge symmetrisch

16.2

$$kx^2+\left(2k-1\right)x+\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{4k}=0$$

$$D=\left(2k-1\right)^2-4\cdot k\cdot\left(\frac{1}{4}k^2+\frac{1}{4k}\right)=4k^2-4k+1-k^3-1=-k^3+4k^2-4k$$

16.3

$$-k^3+4k^2-4k\geq 0$$

$$\Rightarrow -k^3+4k^2-4k=0 \quad \Rightarrow -k(k^2-4k+4)=0$$

$$\Rightarrow k_1=0 \quad k^2-4k+4=0 \ \Rightarrow (k-2)^2=0 \ \Rightarrow k_2=2$$

Skizze von $\left(-k^3+4k^2-4k\right)$:

$$\Rightarrow k\in\left]-\infty;0\right[\cup\left\{2\right\}$$