Aufgaben zu den trigonometrischen Funktionen

1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $[0;2\pi]$ mit Hilfe der folgenden Beispiele.

$\sin x = 0{,}54 \quad \Rightarrow x_1 \approx 0{,}57 \quad x_2 = \pi - 0{,}57 \approx 2{,}57$

$\sin x = -0{,}76 \quad \Rightarrow x_1 \approx -0{,}86 + 2\pi \approx 5{,}42 \quad x_2 \approx \pi - (-0{,}86) \approx 4{,}00$

$\cos x = 0{,}564 \quad \Rightarrow x_1 \approx 0{,}97 \quad x_2 = 2\pi - 0{,}97 \approx 5{,}31$

$\cos x = -0{,}652 \quad \Rightarrow x_1 \approx 2{,}28 \quad x_2 = 2\pi - 2{,}28 \approx 4{,}00$

a) sinx = 0,435 b) sinx = -0,581 c) $\sin x = -\frac{1}{3}\sqrt{2}$

d) cosx = 0,45 e) cosx = -0,381 f) $\cos x = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$

2. Bestimmen Sie die Amplitude, Periode und Verschiebung der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sin(\frac{4}{3}x + \pi)$ b) $f(x) = 2\sin(\frac{4}{3}x - \frac{2}{3}\pi)$ c) $f(x) = \frac{4}{5}\sin(4x+5)$

d) $f(x) = 3\sin(\frac{\pi}{3}x + \frac{2}{3}\pi)$ e) $f(x) = 4\sin(-2x + \frac{\pi}{4})$ f) $f(x) = -4\sin(3-2x)$

g) $f(x) = 3\cos(\pi x - \frac{\pi}{4})$ h) $f(x) = -\cos(\frac{1}{2}x + \frac{\pi}{3})$ i) $f(x) = 2\cos(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{4}x)$

3. Ermitteln Sie die Nullstellen der folgenden Funktionen.

a) $f(x) = \sin(2x - \frac{\pi}{3})$ b) $f(x) = 3\sin(\frac{2}{5}x + 4)$ c) $f(x) = \sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}) + 1$

d) $f(x) = 2\sin(\frac{3}{2}\pi x - \frac{\pi}{3}) - 1$ e) $f(x) = \sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}) - 1$ f) $f(x) = \sin(2\pi x - \frac{9}{4}\pi) + \frac{1}{2}\sqrt{2}$

4.0 Gegeben ist die Funktion $h(x) = \frac{2}{\pi}\sin\left[\frac{\pi}{2}(x+1)\right]$ mit x $\in$ R (Abitur 1999 AI).

4.1 Ermitteln Sie alle Nullstellen der Funktion h.

4.2 Zeichnen Sie den Graphen der Funktion h nach Berechnung geeigneter Funktionswerte im Bereich -1 $\le$ x $\le$ 3 in ein Koordinatensystem ein.

4.3 Bestimmen Sie die Stellen mit waagrechter Tangente der Funktion h(x).

5.0 Gegeben ist die Funktion $g(x) = a \cdot \cos(bx) + c$ mit den Koeffizienten a,b,c $\in$ R$|\{0\}$ in der Definitionsmenge $D = R$ (Abitur 2002 AII).

5.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a, b und c so, dass der Graph der Funktion g durch den Punkt P(0/4) verläuft und im Punkt W(1/2) der Wendepunkt mit dem kleinsten positiven x-Wert vorliegt.

(Ergebnis: $a = 2;\ b = \frac{\pi}{2};\ c = 2$)

5.2 Zeichnen Sie den Graphen von g mit Hilfe geeigneter Funktionswerte für -2 $\le$ x $\le$ 2 in ein Koordinatensystem ein.

6.0 Gegeben ist die Funktion $g(x) = a \cdot \sin(bx)$ mit a,b $\in$ R in der Definitionsmenge $D_g = R$ (Abitur 2005 AI).

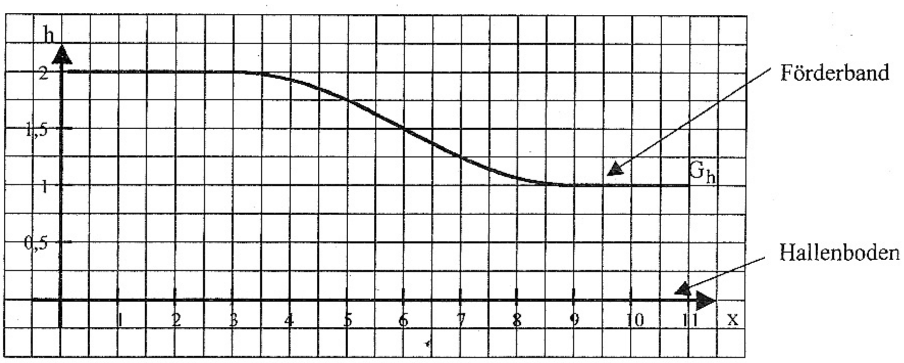
6.1 Bestimmen Sie die Koeffizienten a und b so, dass der Graph von g durch den Punkt T(1/2) verläuft und die kleinste positive Nullstelle bei x = 2 liegt.
(Ergebnis: $a = 2;\ b = \frac{\pi}{2}$)

6.2 Zeichnen Sie für $0 \leq x \leq 2$ den Graph von g in ein Koordinatensystem ein.

7. Gegeben ist die reelle Funktion $g(x) = x - 4 - \sin x$ in der Definitionsmenge $D_g =]0;2\pi[$ (Abitur 2006 AII).
Zeigen Sie mit Hilfe des Monotonieverhaltens, dass die Funktion g in ihrer Definitionsmenge genau eine Nullstelle besitzt.

8. Gegeben ist die Funktion $g(x) = a \cdot \sin(bx + c)$ mit den reellen Parametern a, b und c und der Definitionsmenge D_g = R. (Abitur 2007 AI)
Bestimmen Sie Werte für die Parameter a, b und c so, dass der Graph von g den Tiefpunkt T(0/-4) aufweist und die Periodenlänge 8 besitzt, wobei a und b negativ gewählt werden sollen. Begründen Sie Ihr Vorgehen.

9.0 In einem Flughafenterminal wird die Gepäckabfertigung neu geplant. Unter anderem ist ein neues Förderband für den Transport des Gepäcks vorgesehen. Das Förderband soll zunächst horizontal verlaufen, hat jedoch auf einer Strecke von sechs Metern einen Höhenunterschied von einem Meter zu überwinden, um dann wieder horizontal weiter geführt zu werden. Der Übergang von der höher gelegenen auf die tiefere Ebene soll auf einer kosinusförmigen Kurve verlaufen. Der (nicht maßstabsgetreue) Verlauf des Förderbandes ist unten schematisch als Graph G_h einer Funktion h in Abhängigkeit von x dargestellt.
x gibt dabei die Länge der zurückgelegten Strecke in horizontaler Richtung, h die vom Hallenboden aus gemessene Höhe der Förderbandes in Meter an.
Auf die Verwendung von Einheiten wird verzichtet. (Abitur 2009 AI)



9.1 Der in der Zeichnung abgebildete Graph G_h verläuft in der ganzen Definitionsmenge $D_h = [0;11]$ ohne Knick. Der zugehörige Funktionsabschnitt im Bereich $3 \leq x \leq 9$ soll dabei durch die Gleichung $h(x) = a \cdot \cos(bx + c) + d$ beschrieben werden.
Entnehmen Sie der Zeichnung geeignete Funktionswerte und bestimmen Sie daraus die Konstanten a, b, c und d.

9.2 Die Funktion h kann für $3 \le x \le 9$ auch durch die Gleichung $h(x) = 0{,}5 \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{6}x\right) + 3\right]$ beschrieben werden.
Zeigen Sie mit Hilfe der Ableitungsfunktionen, dass der Graph G_h an der Stelle $x = 6$ einen Wendepunkt besitzt und ermitteln Sie das prozentuale maximale Gefälle des Förderbandes auf eine Nachkommastelle gerundet.

9.3 Das Förderband hat eine Breite von 1,20 m. Um eine dauerhafte Stabilität zu gewährleisten, soll im gezeichneten Bereich $0 \le x \le 11$ der gesamte Raum zwischen Förderband und Hallenboden mit Beton ausgefüllt werden.
Berechnen Sie das Volumen dieses Unterbaus.

10.0 In einem Fluss nimmt das Wasser beim Fließen Sauerstoff aus der Luft auf. Außerdem wird im Wasser Sauerstoff durch bestimmte Arten von Algen in Abhängigkeit von der Sonnenlichteinstrahlung produziert. Gleichzeitig wird während des ganzen Tages Sauerstoff von allen Organismen im Wasser verbraucht.
An einer bestimmten Messstelle ändert sich die Sauerstoffkonzentration k(t) in mg/l des Flusswassers im Verlauf eines Tages sinusförmig mit der Periodendauer T = 24 h.
Der Verlauf kann näherungsweise durch $k(t) = a \cdot \sin(bt + c) + d$ beschrieben werden, wobei t mit $0 \le t \le 24$ die seit 0 Uhr verstrichene Zeit in Stunden beschreibt.
Kontinuierliche Messungen über den ganzen Tag hinweg ergaben das Minimum der Sauerstoffkonzentration im Wasser von 4,20 mg/l um 4:00 Uhr morgens und das Maximum von 11,8 mg/l um 16:00 Uhr am Nachmittag.
Auf das Mitführen der Einheiten kann bei den Berechnungen verzichtet werden.
(Abitur 2014 AI)

10.1 Geben Sie mit Begründung einen geeigneten Funktionsterm k(t) an und zeichnen Sie das Schaubild dazu.
(Mögliches Teilergebnis: $k(t) = 3{,}8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) + 8$)

10.2 Bestimmen Sie die Uhrzeit, zu der die Abnahme der Sauerstoffkonzentration am größten war. Auf eine Untersuchung an den Rändern des Beobachtungszeitraums kann dabei verzichtet werden.

10.3 Berechnen Sie mittels Integration die mittlere Sauerstoffkonzentration des Flusswassers für den Zeitraum von 0:00 Uhr bis 10:00 Uhr auf eine Nachkommastelle genau.

11.0 Unter der Tageslänge versteht man die Dauer von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang. Sie ist von der geographischen Breite des Ortes abhängig.
Es wurden die Tageslängen in München im Jahr 2016 (Schaltjahr mit 366 Tagen) aufgezeichnet. Die maximale Tageslänge betrug 16,12 h, die minimale Tageslänge 8,40 h. Die Tageslänge am 1.1.2016 (0. Tag) betrug 8,46 h (Wert geringfügig verändert).
Die Funktion $g: t \mapsto a \cdot \sin(b \cdot t + c) + d$ mit $a, b, c, d, t \in \mathbb{R}$ und $t \in [0; 366[$ wird nun modellhaft zur Darstellung der Aufzeichnungen verwendet. t beschreibt dabei die Anzahl der vergangenen Tage ab Beginn des 1.1.2016 und der Funktionswert g(t) die Länge des dazugehörigen Tages in Stunden. Da sich die jeweilige Tageslänge immer auf ganze Tage bezieht, sollen Werte für t auf ganze Zahlen gerundet werden. Auf das Mitführen der Einheiten wird verzichtet. (Abitur 2017 AII)

11.1 Bestimmen Sie mögliche Werte der Parameter a, b, d exakt und c sinnvoll gerundet so, dass die Funktion g die obigen Bedingungen erfüllt.
(Teilergebnis: $g: t \mapsto 3{,}86 \cdot \sin(0{,}01717t - 1{,}39) + 12{,}26$)

11.2 Bestimmen Sie für 2016 die Tage, an denen die Tageslänge in München 12 h betrug.

11.3 Berechnen Sie den kürzesten Tag des Jahres 2016 in München.

11.4 Berechnen Sie für München den prozentualen Anteil der Tageslicht-Stunden an den Stunden der ersten 100 Tage des Jahres 2016.

Lösungen

1a) $x_1 \approx 0{,}45 \qquad x_2 \approx \pi - 0{,}45 \approx 2{,}69$
1b) $x_1 \approx -0{,}62 + 2\pi \approx 5{,}66 \qquad x_2 \approx \pi - 5{,}66 \approx -2{,}52 \;\Rightarrow x_2 \approx -2{,}52 + 2\pi \approx 3{,}76$
1c) $x_1 \approx -0{,}49 + 2\pi \approx 5{,}79 \qquad x_2 \approx \pi - 5{,}79 \approx -2{,}65 \;\Rightarrow x_2 \approx -2{,}65 + 2\pi \approx 3{,}63$
1d) $x_1 \approx 1{,}10 \qquad x_2 \approx 2\pi - 1{,}10 \approx 5{,}18$
1e) $x_1 \approx 1{,}96 \qquad x_2 \approx 2\pi - 1{,}96 \approx 4{,}32$
1f) $x_1 \approx 2{,}62 \qquad x_2 \approx 2\pi - 2{,}62 \approx 3{,}66$

2a)

$$f(x) = \sin[\frac{4}{3}(x + \frac{3}{4}\pi)]$$

Amplitude: 1 Periode: $\frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$ Verschiebung um $\frac{3}{4}\pi$ nach links

2b)

$$f(x) = 2\sin[\frac{4}{3}(x - \frac{\pi}{2})]$$

Amplitude: 2 Periode: $\frac{2\pi}{\frac{4}{3}} = \frac{3\pi}{2}$ Verschiebung um $\frac{1}{2}\pi$ nach rechts

2c)

$$f(x) = \frac{4}{5}\sin[4(x + \frac{5}{4})]$$

Amplitude: $\frac{4}{5}$ Periode: $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ Verschiebung um $\frac{5}{4}$ nach links

2d)

$$f(x) = 3\sin[\frac{\pi}{3}(x + 2)]$$

Amplitude: 3 Periode: $\frac{2\pi}{\frac{\pi}{3}} = 6$ Verschiebung um 2 nach links

2e)

$$f(x) = 4\sin[-1(2x - \frac{\pi}{4})] = -4\sin(2x - \frac{\pi}{4}) = -4\sin[2(x - \frac{\pi}{8})]$$

Amplitude: 4 Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Verschiebung um $\frac{\pi}{8}$ nach rechts

Spiegelung an der x-Achse

Alternative: $4\sin(2x - \frac{\pi}{4} + \pi) = 4\sin(2x + \frac{3\pi}{4}) = 4\sin[2(x + \frac{3\pi}{8})]$

Amplitude: 4 Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Verschiebung um $\frac{3}{8}\pi$ nach links

2f)

$$f(x) = -4\sin[-1(2x - 3)] = 4\sin(2x - 3) = 4\sin[2(x - \frac{3}{2})]$$

Amplitude: 4 Periode: $\frac{2\pi}{2} = \pi$ Verschiebung um $\frac{3}{2}$ nach rechts

2g)

$$f(x) = 3\cos[\pi(x - \frac{1}{4})]$$

$$\text{Amplitude: } 3 \quad \text{Periode: } \frac{2\pi}{\pi} = 2 \quad \text{Verschiebung um } \frac{1}{4} \text{ nach rechts}$$

2h)

$$f(x) = -\cos[\frac{1}{2}(x + \frac{2\pi}{3})]$$

$$\text{Amplitude: } 1 \quad \text{Periode: } \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \quad \text{Verschiebung um } \frac{2}{3}\pi \text{ nach links}$$

2i)

$$f(x) = 2\cos[-1(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6})] = 2\cos(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{6}) = 2\cos[\frac{\pi}{4}(x - \frac{2}{3})]$$

$$\text{Amplitude: } 2 \quad \text{Periode: } \frac{2\pi}{\frac{\pi}{4}} = 8 \quad \text{Verschiebung um } \frac{2}{3} \text{ nach rechts}$$

3a)

$$2x - \frac{\pi}{3} = k\pi \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k$$

3b)

$$\frac{2}{5}x + 4 = k\pi \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow \frac{2}{5}x = k\pi - 4 \quad \Rightarrow x = \frac{5\pi}{2}k - 10$$

3c)

$$\sin(\frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4}) = -1 \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2}x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{5}{2} + 4k$$

3d)

$$2\sin(\frac{3\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}) = 1 \quad \Rightarrow \sin(\frac{3\pi}{2}x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow 1) \ \frac{3\pi}{2}x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow \frac{3\pi}{2}x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{1}{3} + \frac{4}{3}k$$

$$\Rightarrow 2) \ \frac{3\pi}{2}x - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow \frac{3\pi}{2}x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{7}{9} + \frac{4}{3}k$$

3e)

$$\sin(\frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4}) = 1 \quad \Rightarrow \frac{1}{2}x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 4k\pi$$

3f)

$$\sin(2\pi x - \frac{9}{4}\pi) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow 1)\ \ 2\pi x - \frac{9}{4}\pi = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow 2\pi x = \frac{14\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow x = \frac{7}{4} + k$$

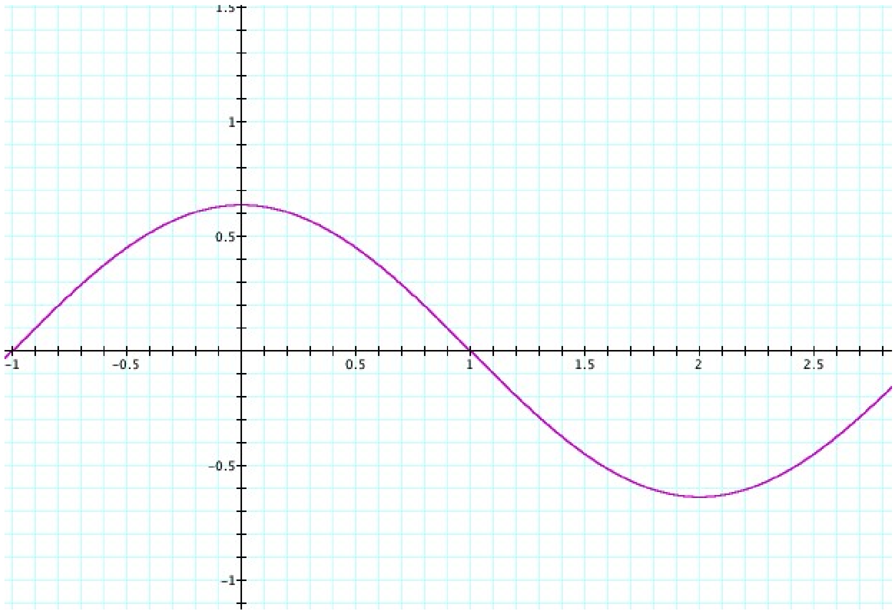
$$\Rightarrow 2)\ \ 2\pi x - \frac{9}{4}\pi = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \quad \Rightarrow 2\pi x = 4\pi + 2k\pi \quad \Rightarrow x = 2 + k$$

4.1

$$\frac{2}{\pi}\sin[\frac{\pi}{2}(x+1)] = 0 \quad \Rightarrow \sin[\frac{\pi}{2}(x+1)] = 0 \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2}(x+1) = k\pi \quad k \in Z$$

$$\Rightarrow x+1 = 2k \quad \Rightarrow x = 2k-1$$

4.2



4.3

$$h'(x) = \frac{2}{\pi}\cos[\frac{\pi}{2}(x+1)] \cdot \frac{\pi}{2} = \cos[\frac{\pi}{2}(x+1)]$$

$$\cos[\frac{\pi}{2}(x+1)] = 0 \quad \Rightarrow \frac{\pi}{2}(x+1) = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \Rightarrow x+1 = 1+2k \quad \Rightarrow x = 2k$$

5.1

$$g'(x) = a \cdot (-\sin(bx)) \cdot b = -ab\sin(bx)$$

$$g''(x) = -ab\cos(bx) \cdot b = -ab^2\cos(bx)$$

$$(I) \quad g(0) = 4 \qquad \Rightarrow a + c = 4$$

$$(II) \quad g(1) = 2 \qquad \Rightarrow a \cdot \cos(b) + c = 2$$

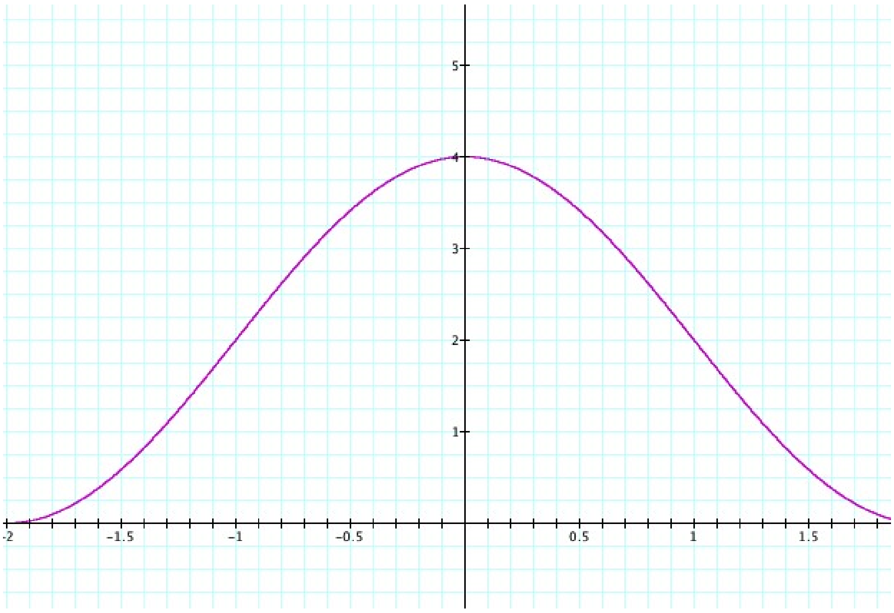
$$(III) \quad g''(1) = 0 \qquad \Rightarrow -ab^2 \cdot \cos(b) = 0$$

$$-ab^2 \neq 0 \ \text{(da a,b} \in \mathrm{R}|\{0\}) \quad \Rightarrow \cos(b) = 0 \quad b = \frac{\pi}{2} \ \text{(kleinster positiver x - Wert)}$$

$$\text{(II)} \Rightarrow \text{c} = 2 \quad \text{(I)} \Rightarrow \text{a} = 2$$

5.2

x	-2	-1	0	1	2
g(x)	0	2	4	2	0



6.1

$$(I)\quad g(1)=2 \quad \Rightarrow a\cdot \sin b = 2$$

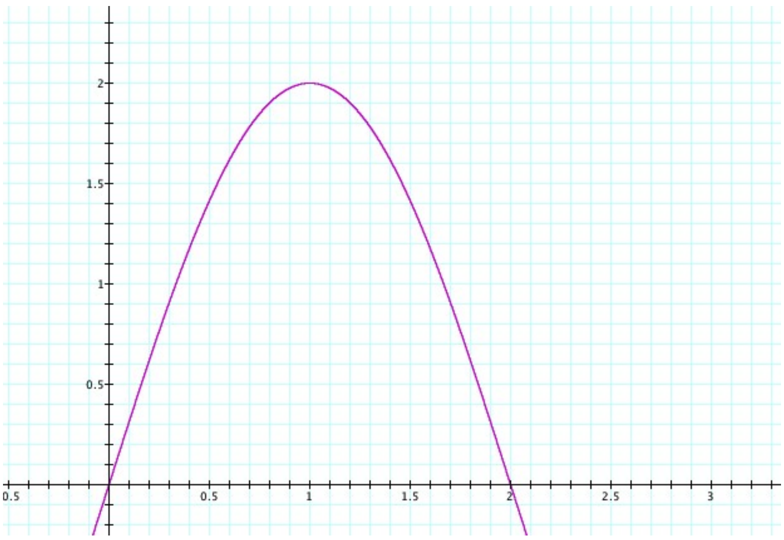
$$(II)\quad g(2)=0 \quad \Rightarrow a\cdot \sin 2b = 0$$

$$(II) \Rightarrow \sin 2b = 0 \text{ (da a} \neq 0 \text{ nach (I))} \quad \Rightarrow 2b=\pi \quad \Rightarrow b=\frac{\pi}{2}$$

$$(I) \Rightarrow a\cdot \sin\frac{\pi}{2} = 2 \quad \Rightarrow a=2$$

6.2

x	0	0,5	1	1,5	2
g(x)	0	1,41	2	1,41	0



7)

$g(0) = -4 < 0 \qquad g(2\pi) = 2\pi - 4 > 0$

$\Rightarrow$ da g im Intervall $]0;2\pi[$ stetig ist, gibt es nach Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $]0;2\pi[$;

$g'(x) = 1 - \cos x \qquad \Rightarrow 1 - \cos x = 0 \qquad \Rightarrow \cos x = 1 \qquad \Rightarrow x_1 = 0$ und $x_2 = 2\pi$

Skizze der Ableitungsfunktion:

$\Rightarrow$ g′(x) ist im Intervall $]0;2\pi[$ größer als Null $\Rightarrow G_g$ steigt streng monoton im Intervall $]0;2\pi[$ $\Rightarrow$ g besitzt im Intervall $]0;2\pi[$ nur eine Nullstelle;

8)

Für die Periodenlänge gilt:

$$p = \frac{2\pi}{|b|} \quad \Rightarrow 8 = \frac{2\pi}{|b|} \quad \Rightarrow |b| = \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow b = \pm\frac{\pi}{4}$$

$\Rightarrow b = -\frac{\pi}{4}$ (weil b negativ gewählt werden soll)

$$g(x) = a \cdot \sin(-\frac{\pi}{4}x + c) \qquad \Rightarrow g'(x) = a \cdot \cos(-\frac{\pi}{4}x + c) \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$(I) \quad g(0) = -4 \qquad \Rightarrow a \cdot \sin(c) = -4$

$(II) \quad g'(0) = 0 \qquad \Rightarrow -\frac{\pi}{4} \cdot a \cdot \cos(c) = 0$

Aus (I) und (II) folgt:

$\cos(c) = 0$ (a kann nicht Null werden) $\Rightarrow c = \frac{\pi}{2} + k \cdot \pi$ mit $k \in Z$

(I) $\Rightarrow a \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + k \cdot \pi) = -4 \qquad \Rightarrow a \cdot (\pm 1) = -4$

$\Rightarrow a = \ \ 4 \qquad \Rightarrow a = -4$ (da a negativ gewählt werden soll)

Wegen $a < 0$, muss gelten:

$$\sin(c) = 1 \quad \Rightarrow c = \frac{\pi}{2} + k \cdot 2\pi \text{ mit } k \in Z \quad \Rightarrow c \in \left\{...;-\frac{7}{2}\pi;-\frac{3}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi;\frac{5}{2}\pi;\frac{9}{2}\pi;...\right\}$$

9.1

Verschiebung um 1,5 nach oben $\Rightarrow$ d = 1,5

Amplitude 0,5 $\Rightarrow$ a = 0,5

Periode muss 12 sein $\Rightarrow 12 = \frac{2\pi}{b} \quad \Rightarrow b = \frac{\pi}{6}$

Verschiebung um 3 nach rechts

$$\Rightarrow h(x) = 0,5 \cdot \cos[\frac{\pi}{6}(x-3)] + 1,5 = 0,5 \cdot \cos[\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{2}] + 1,5 \quad \Rightarrow c = -\frac{\pi}{2}$$

Alternative für Berechnung von c: Punkt von h z.B. (3/2) einsetzen

9.2

$$h'(x) = 0,5 \cdot \cos(\frac{\pi}{6}x) \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{12} \cdot \cos(\frac{\pi}{6}x)$$

$$h''(x) = \frac{\pi}{12} \cdot [-\sin(\frac{\pi}{6}x) \cdot \frac{\pi}{6}] = -\frac{\pi^2}{72} \cdot \sin(\frac{\pi}{6}x)$$

$$h''(6) = -\frac{\pi^2}{72} \cdot \sin(\frac{\pi}{6} \cdot 6) = -\frac{\pi^2}{72} \cdot \sin(\pi) = 0$$

Nachweis Wendepunkt:

x = 6 ist eine einfache Nullstelle von h´´ $\Rightarrow$ VZW $\Rightarrow$ Wendestelle

$$h'(6) = \frac{\pi}{12} \cdot \cos(\frac{\pi}{6} \cdot 6) = -\frac{\pi}{12} \approx -0,262 \quad \Rightarrow 26,2\% \text{ Gefälle}$$

9.3

Fläche von 0 - 3: $A_1 = 3 \cdot 2 = 6$

Fläche von 3 - 9: $A_2 = 6 \cdot 1 = 6$ $\quad A_3 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 1 = 3$ (wegen Symmetrie)

Fläche von 9-11: $A_4 = 2 \cdot 1 = 2$

$\Rightarrow A_{Gesamt} = 6 + 6 + 3 + 2 = 17$

$\Rightarrow V = 17 \cdot 1,20 = 20,4$

10.1

$$k(t) = a \cdot \sin(bt + c) + d$$

$$\text{Periodenlänge}: T = \frac{2\pi}{b} = 24 \quad \Rightarrow b = \frac{2\pi}{24} = \frac{\pi}{12}$$

$$\text{Max} - \text{Min} = 11{,}8 - 4{,}2 = 7{,}6 \quad \Rightarrow \text{Amplitude } a = \frac{7{,}6}{2} = 3{,}8$$

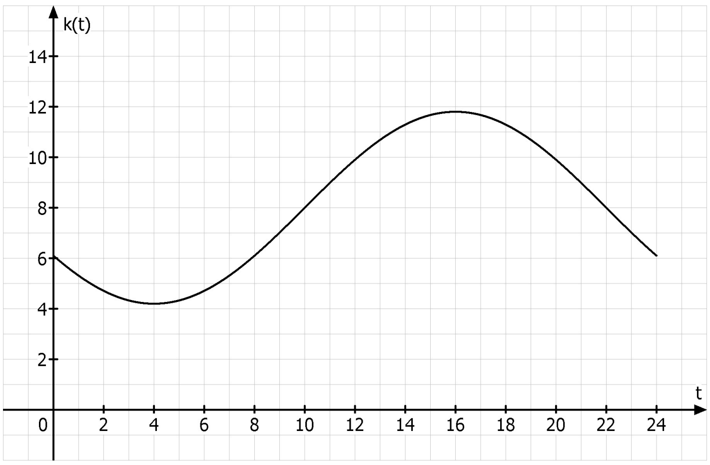
$$\text{Verschiebung nach oben}: 3{,}8 + 4{,}2 = 8$$

$$\Rightarrow k(t) = 3{,}8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t + c\right) + 8$$

$$k(4) = 3{,}8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3} + c\right) + 8 = 4{,}20 \quad \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{3} + c\right) = -1$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{3} + c = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad \overset{\text{mit } k=0}{\Rightarrow} \quad c = \frac{7}{6}\pi$$

$$\Rightarrow k(t) = 3{,}8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{7}{6}\pi\right) + 8$$



10.2

$$k'(t) = 3{,}8 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$k''(t) = -3{,}8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{12}$$

$$k''(t) = 0 \quad \Rightarrow \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6} = k\pi \quad k \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{\pi}{12}t = \frac{5\pi}{6} + k\pi \Rightarrow t = 10 + 12k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow t_1 = 10 \qquad t_2 = 22$$

$\Rightarrow$ t_1 und t_2 sind einfache Nullstellen von k'' $\Rightarrow$ WP wegen VZW

Skizze von k'':

$\Rightarrow$ bei t = 22, also nach 22 Stunden ist die Abnahme der Sauerstoffkonzentration am größten;

10.3

$$\int_0^{10} \left[3{,}8 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) + 8\right] dt = \left[-3{,}8 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}t - \frac{5\pi}{6}\right) \cdot \frac{12}{\pi} + 8t\right]_0^{10} =$$

$$= \left[-3{,}8 \cdot \frac{12}{\pi} + 80\right] - 12{,}57 \approx 52{,}92$$

$\Rightarrow$ Mittlere Sauerstoffkonzentration: $\frac{1}{10} \cdot 52{,}92 \approx 5{,}3$ mg / l

11.1

$$d = \frac{g_{max} + g_{min}}{2} = \frac{16{,}12 + 8{,}40}{2} = 12{,}26$$

$$a = 16{,}12 - 12{,}26 = 3{,}86$$

$$b = \frac{2\pi}{366} = \frac{\pi}{183}$$

$$g(0) = 8{,}46 \quad \Rightarrow 3{,}86 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{183} \cdot 0 + c\right) + 12{,}26 = 8{,}46$$

$$\Rightarrow \sin(c) = -\frac{190}{193} \quad \Rightarrow c \approx -1{,}39$$

11.2

$$3{,}86\cdot\sin\left(0{,}01717t-1{,}39\right)+12{,}26=12\quad\Rightarrow\sin\left(0{,}01717t-1{,}39\right)=-\frac{13}{193}$$

1) $0{,}01717t-1{,}39=-0{,}0673\quad\Rightarrow t\approx 77$

2) $0{,}01717t-1{,}39=\pi-(-0{,}0673)\quad\Rightarrow t\approx 268$

Am 77. und 268. Tag des Jahres 2016 betrug die Tageslänge in München 12 Stunden.

11.3

$$\dot{g}(t)=3{,}86\cdot\cos\left(\frac{\pi}{183}t-1{,}39\right)\cdot\frac{\pi}{183}$$

$$\dot{g}(t)=0\quad\Rightarrow\cos\left(\frac{\pi}{183}t-1{,}39\right)=0$$

1) $\frac{\pi}{183}t-1{,}39=\frac{\pi}{2}\quad\Rightarrow t\approx 172$

2) $\frac{\pi}{183}t-1{,}39=\frac{3\pi}{2}\quad\Rightarrow t\approx 355$

Skizze von $\dot{g}$:

$\Rightarrow t=355$ Minimum

Da g im Bereich $[0;366[$ nur ein Extremum (Minimum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow t=355$ absolutes Minimum

Alternative: $g(t)=8{,}40$ (nach Angabe !!)

11.4

$$\int_0^{100}\left(3{,}86\cdot\sin\left(\frac{\pi}{183}t-1{,}39\right)+12{,}26\right)dt=$$

$$=\left[-3{,}86\cdot\cos\left(\frac{\pi}{183}t-1{,}39\right)\cdot\frac{183}{\pi}+12{,}26t\right]_0^{100}\approx 1013{,}05-(-40{,}43)=1053{,}48$$

Gesamtstundenzahl: $100\cdot 24=2400$

$$\Rightarrow\frac{1053}{2400}=0{,}438750\approx 44\%$$