

## Aufgaben zum Aufstellen von Ebenen

1.0 Geben Sie eine Parameterdarstellung und die Normalenform einer Ebene E an, die durch die Punkte A, B und C festgelegt ist.

1.1  $A(0/1/2), B(1/0/2), C(3/6/0)$

1.2  $A(4/3/1), B(5/1/4), C(6/3/2)$

2.0 Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E auf, die durch eine Gerade g und einen Punkt P festgelegt ist.

2.1  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$  und  $P(1/4/-2)$

2.2  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  und  $P(0/-4/6)$

3.0 Stellen Sie eine Parameterdarstellung der Ebene E auf, die durch zwei Geraden g und h festgelegt ist.

Hinweis: Prüfen Sie zuerst, ob die Geraden parallel sind oder sich schneiden.

3.1  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$

3.2  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $h: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4.0 Überprüfen Sie, ob durch folgende Parametergleichungen eine Ebene im Raum beschrieben wird.

4.1  $\vec{x} = k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4.2  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.3  $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5. Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Ebene E, die zu den Geraden  $g_1$  und  $g_2$  parallel ist und durch den Punkt  $P(-1/0/2)$  verläuft.

$$g_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad g_2: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0,5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6.0 Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E, die durch den Punkt  $P(3/4/-2)$  geht und

6.1 parallel zur  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene verläuft.

6.2 parallel zur  $x_2$ - $x_3$ -Koordinatenebene verläuft.

7. Gegeben ist die Ebene  $E: 2x_1 - 6x_2 + 12x_3 - 2 = 0$ . Bestimmen Sie  $p_1$  so, dass  $P(p_1/0/1)$  in der Ebene  $E$  liegt und prüfen Sie, ob  $R(-2/-1/-2)$  und  $Q(-11/2/3)$  in der Ebene liegen.

8. Betrachtet wird ein Dreieck mit den Eckpunkten  $A(2/-4/0)$ ,  $B(-3/1/4)$  und  $C(-1/2/0)$ . Ermitteln Sie, ob der Ursprung im Inneren dieses Dreiecks liegt.

9.0 Stellen Sie die Normalenform einer Ebene  $E$  auf, die durch den Punkt  $A(-4/1/3)$  geht und

9.1 senkrecht zur  $x_2$ -Achse verläuft

9.2 parallel zur Ebene  $W: 2x_1 - x_2 - x_3 = 8$  verläuft

10. Gegeben sind mit  $t \in \mathbb{R}$   $g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -3t \\ 1 \\ 2t \end{pmatrix}$ .

Zeigen Sie, dass alle Geraden der Schar  $g$  in einer Ebene liegen und geben Sie eine Normalenform dieser Ebene  $E$  an.

11.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind in Abhängigkeit der Variablen

$p, q \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  die Vektoren  $\vec{a} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix}$  und  $\vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix}$  gegeben. (Abitur 2011 BI)

11.1 Zeigen Sie, dass unabhängig von der Wahl der Werte für  $p$  und  $q$  die Vektoren  $\vec{a}$  und  $\vec{b}$  senkrecht aufeinander stehen.

Setzen Sie nun  $p = 2$  und  $q = 1$ . Daraus ergeben sich mit dem Koordinatenursprung  $O$  die Ortsvektoren  $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$  und  $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$  für die Punkte  $A$  und  $B$ .

11.2 Bestimmen Sie eine Normalengleichung der Ebene  $E$ , in der die Punkte  $A$  und  $B$  sowie der Koordinatenursprung  $O$  liegen. Geben Sie die Ebene  $E$  auch in Koordinatenform an.

12.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $P(1;0;0)$ ,  $Q(0;1;0)$ ,  $R(0;0;1)$  und  $S_k(k;k;k)$  mit  $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$  gegeben. (Abitur 2011 BII)

12.1 Berechnen Sie die Werte des Parameters  $k$ , für die die gegebenen Punkte eine dreiseitige Pyramide aufspannen.

12.2 Bestimmen Sie, für welche Werte des Parameters  $k$  die Pyramide ein reguläres Tetraeder, also eine gleichseitige Pyramide ist.

13.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$  sind die Punkte  $A_k(0/k/2-2k)$  mit  $k \in \mathbb{R}$  und  $B(5/-3/0)$  gegeben. (Abitur 2012 BII)

13.1 Bestimmen Sie eine Gleichung der Gerade  $g$ , auf der alle Punkte  $A_k$  liegen.

(Mögliches Ergebnis:  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R}$ )

13.2 Berechnen Sie den Parameterwert  $k$  so, dass der zugehörige Punkt  $A_k$  den kleinstmöglichen Abstand vom Koordinatenursprung hat.

- 13.3 Zeigen Sie, dass jeder Punkt  $A_k$  mit dem Punkt B eindeutig eine Gerade  $h_k$  festlegt, und stellen Sie eine Gleichung der Geraden  $h_k$  in Abhängigkeit von  $k$  auf.
- 13.4 Ermitteln Sie eine Gleichung in Normalenform für die Ebene E, die durch die Punkte  $A_0$ ,  $A_1$  und B festgelegt ist.  
(Mögliches Ergebnis:  $E : 8x_1 + 10x_2 + 5x_3 - 10 = 0$ )
- 13.5 Geben Sie eine Gleichung der Geraden  $r$  an, die in der Ebene E liegt, den Punkt B enthält und nicht zur Menge der Geraden  $h_k$  gehört. Begründen Sie Ihr Ergebnis mithilfe einer Skizze.
- 14.0 Geben Sie jeweils eine Ebene in Normalenform an, die die folgende besondere Lage hat.
- 14.1 Die Ebene enthält den Ursprung.
- 14.2 Die Ebene ist parallel zur  $x_2$ - $x_3$ -Ebene.
- 14.3 Die Ebene enthält die  $x_3$ -Achse.
- 14.4 Die Ebene ist die  $x_1$ - $x_3$ -Ebene.
- 14.5 Die Ebene ist echt parallel zur  $x_1$ -Achse.
- 14.6 Die Ebene enthält den Ursprung und ist parallel zur  $x_2$ -Achse.

## Lösungen

$$1.1 \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{E: } x_1 + x_2 + 4x_3 - 9 = 0$$

$$1.2 \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{E: } -2x_1 + 5x_2 + 4x_3 - 11 = 0$$

$$2.1 \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

2.2 Der Punkt P liegt auf der Geraden g, also kann mit der Geraden g und P keine Ebene E festgelegt werden.

$$3.1 \text{ Geraden g und h sind parallel; E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$3.2 \text{ Geraden g und h schneiden sich in } S(-5/-5/4); \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

4.1 Die Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also beschreibt die Gleichung eine Ebene durch den Nullpunkt.

4.2 Die Richtungsvektoren sind linear abhängig, also beschreibt die Gleichung eine Gerade, aber keine Ebene im Raum.

4.3 Die drei Richtungsvektoren sind linear unabhängig, also beschreibt die Gleichung keine Ebene, sondern den gesamten Raum.

$$5. \text{ E: } \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

6.1 Parallel zur  $x_1$ - $x_2$ -Koordinatenebene heißt:  $x_3 = p_3$ ; E:  $x_3 = -2$ ;

6.2 E:  $x_1 = 3$

7. P einsetzen in E und nach  $p_1$  auflösen:  $p_1 = -5$ ;

$R \notin E$ ;  $Q \in E$ ;

8.

Ebene durch die Punkte A, B und C aufstellen:

$$E: \vec{x} = \vec{a} + s \cdot \overline{AB} + t \cdot \overline{AC} \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow s = 0 \text{ und } t = \frac{2}{3}$$

$\Rightarrow$  der Ursprung liegt innerhalb des Dreiecks ABC

$$9.1 \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 4 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: x_2 - 1 = 0$$

9.2

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 4 \\ x_2 - 1 \\ x_3 - 3 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: 2(x_1 + 4) - 1(x_2 - 1) - 1(x_3 - 3) = 0$$

$$\Rightarrow E: 2x_1 - x_2 - x_3 + 12 = 0$$

10.

$$g_t: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Normalenform der Ebene E:

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 + 2 \\ x_2 - 3 \\ x_3 - 1 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow E: 2(x_1 + 2) + 3(x_3 - 1) = 0$$

$$\Rightarrow E: 2x_1 + 3x_3 + 1 = 0$$

11.1

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} p-q \\ -p \\ q \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p-q \\ p \\ 2p-q \end{pmatrix} = (p-q)^2 - p^2 + q \cdot (2p-q) =$$

$$= p^2 - 2pq + q^2 - p^2 + 2pq - q^2 = 0$$

$\Rightarrow \vec{a}$  und  $\vec{b}$  stehen aufeinander senkrecht unabhängig von der Wahl von p und q.

11.2

$$\begin{aligned} E: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ \vec{n}_E &= \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{n}_E^* = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= 0 \quad \Rightarrow E: 4x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{aligned}$$

12.1

Die gegebenen Punkte spannen eine dreiseitige Pyramide auf, wenn z.B. P, Q und R eine Ebene aufspannen und  $S_k$  nicht in der Ebene liegt.

$$\begin{aligned} E: \vec{x} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{n}_E &= \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow E: \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right] &= 0 \quad \Rightarrow E: x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$S_k \text{ einsetzen: } k + k + k - 1 = 0 \quad \Rightarrow k = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow$  für  $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{0; \frac{1}{3}\right\}$  spannen die Punkte eine dreiseitige Pyramide auf.

12.2

$$\overline{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overline{PR} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \overline{QR} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\overline{PQ}| = |\overline{PR}| = |\overline{QR}| = \sqrt{2}$$

$$\overline{PS_k} = \begin{pmatrix} k-1 \\ k \\ k \end{pmatrix} \quad \overline{QS_k} = \begin{pmatrix} k \\ k-1 \\ k \end{pmatrix} \quad \overline{RS_k} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ k-1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\overline{PS_k}| = |\overline{QS_k}| = |\overline{RS_k}| = \sqrt{k^2 + k^2 + (k-1)^2} = \sqrt{k^2 + k^2 + k^2 - 2k + 1} = \sqrt{3k^2 - 2k + 1}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3k^2 - 2k + 1} = \sqrt{2} \Rightarrow 3k^2 - 2k + 1 = 2 \Rightarrow 3k^2 - 2k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow k_{1/2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 3 \cdot (-1)}}{6} = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{6} = \frac{2 \pm 4}{6}$$

$$\Rightarrow k_1 = 1 \quad k_2 = -\frac{1}{3}$$

13.1  $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad k \in \mathbb{R}$

13.2

$$\overline{OA_k} = \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2k \end{pmatrix}$$

$$\overline{OA_k} \perp \vec{r}_g \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2k \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow k + (2-2k) \cdot (-2) = 0 \Rightarrow k - 4 + 4k = 0 \Rightarrow k = 0,8$$

13.3

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 5 = 0 \text{ (f)} \\ -3 = k \\ 0 = 2 - 2k \end{matrix} \Rightarrow B \notin g$$

$\Rightarrow A_k$  und B legen eine Gerade  $h_k$  fest

$$\Rightarrow h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \left[ \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 2-2k \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow h_k: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ k+3 \\ 2-2k \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

13.4

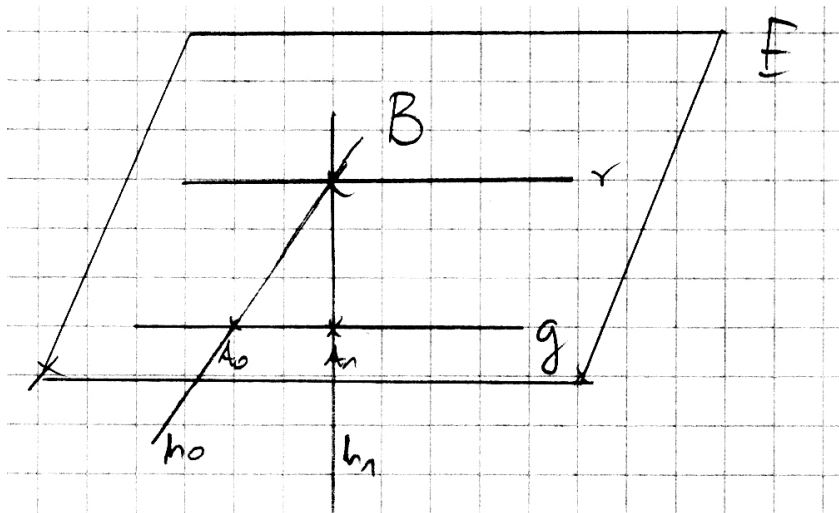
$$A_0(0/0/2) \quad A_1(0/1/0) \quad B(5/-3/0)$$

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad s, t \in \mathbb{R}$$

$$\vec{n}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$E: \begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -5 \end{pmatrix} \circ \left[ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = 0 \Rightarrow E: -8x_1 - 10x_2 - 5x_3 + 10 = 0$$

13.5



$$r: \vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

14.1  $E: x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 0$

14.2  $E: x_1 - 2 = 0$

14.3  $E: x_1 - 2x_2 = 0$

14.4  $E: x_2 = 0$

14.5  $E: 2x_2 - 3x_3 + 5 = 0$

14.6  $E: 3x_1 + x_3 = 0$