Aufgaben zum Aufstellen von Funktionen aus gegebenen Bedingungen

1. Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p(x). Diese Parabel schneidet die x-Achse im Punkt N(6/0). Ihr Scheitelpunkt $S(3/y_S)$ liegt auf dem Graphen der Funktion $f(x) = -\frac{1}{9}x^3 + \frac{2}{3}x^2$.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). (Abitur 1996 AII)

2. Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p(x). Diese Parabel schneidet den Graphen von $f(x) = \frac{1}{3}(x^3 - 3x^2 - 9x + 2)$ an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 4$ und besitzt an der Stelle $x_3 = 3$ eine zur Geraden mit der Gleichung y = -2x parallele Tangente.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). (Abitur 1997 AII)

3. Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p(x).
   Diese Parabel verläuft symmetrisch zur y-Achse, schneidet die x-Achse im Punkt N(3/0) und die Ordinate ihres Scheitelpunktes hat den Wert $y_S = -3$.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). (Abitur 1998 A II)

4. Der Graph G_g der reellen Funktion g(x) mit $g(x) = \frac{1}{4}(-x^3 + ax^2 + bx + c)$ schneidet die x-Achse an der Stelle $x_0 = 2$ und hat den relativen Tiefpunkt T(4/-5).
   Bestimmen Sie den Funktionsterm g(x). (Abitur 2000 A I)

5. Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p(x).
   Die Funktion p hat bei $x_0 = -4$ eine Nullstelle. Ihr Graph G_p schneidet den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - 3x + 4$ auf der y-Achse und hat in diesem Schnittpunkt die Steigung $m = \frac{1}{3}$.
   Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). (Abitur 2001 A I)

6. Die Parabel G_p ist der Graph der quadratischen Funktion p(x).
   Diese Parabel geht durch den Punkt P(-3/9) und berührt den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{2}{27}x^3 - 2x + 5$ im Punkt Q(3/y).
   Bestimmen Sie den Funktionsterm p(x). (Abitur 2002 A I)

7.0 Einem Betrieb entstehen bei der Herstellung einer Ware Gesamtkosten, die von der Menge des hergestellten Produkts (kurz: Produktmenge x) abhängen.
Beispiel: Die Herstellung von 3 Mengeneinheiten (ME) kosten 30 Geldeinheiten (GE) (Zur Vereinfachung werden für die Berechnungen sämtliche Einheiten weggelassen).
Um die Problematik mathematisch erfassen zu können, wird angenommen, dass die Gesamtkosten durch eine ganzrationale Funktion k dritten Grades beschrieben werden kann, deren Graph G_k durch die Punkte A(0;3), B(1;22), C(2;29) und D(3;30) verläuft.
Für die Definitionsmenge der Funktion k gilt: $D_k = [0;7]$.

7.1 Ermitteln Sie den Funktionsterm k(x).
(Teilergebnis: $k(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3$)

7.2 Zeigen Sie, dass die Funktion k auf ihrer gesamten Definitionsmenge echt monoton zunimmt.
Welche Bedeutung hat dieses Ergebnis für die Gesamtkosten ?

7.3 Bestimmen Sie den Punkt P des Graphen G_k, für den G_k die geringste Steigung besitzt.
Beschreiben Sie kurz, um welchen besonderen Punkt des Graphen es sich bei P handelt.

7.4 Zeichnen Sie den Graphen G_k bezüglich $D_k = [0;7]$ mit Hilfe bisheriger Angaben bzw. Ergebnisse und einer geeigneten Wertetabelle in ein rechtwinkliges Koordinatensystem.
Maßstab auf der x-Achse: $1\ cm \stackrel{\wedge}{=} 1\ Mengeneinheit\ (ME)$
Maßstab auf der y-Achse: $1\ cm \stackrel{\wedge}{=} 10\ Geldeinheiten\ (GE)$
(Abitur 2000 AII)

8. Die reelle Funktion $f''(x) = \frac{3}{8}x^2 - 2$ ist die zweite Ableitung der Funktion f. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet. Gegeben ist außerdem die reelle Funktion $p(x) = \frac{1}{12}x^2 + \frac{25}{6}$. Der Graph dieser Funktion ist die Parabel G_p.
Der Graph G_f schneidet die Parabel G_p im Punkt $A(2;y_A)$. Die Steigung der Tangente an G_f im Punkt A wird m_f genannt, die Steigung der Tangente G_p im selben Punkt m_p.
Es gilt nun: $m_f \cdot m_p = -1$.
Berechnen Sie den Funktionsterm der Funktion f. (Abitur 2003 AI)

9.0 Der Graph einer ganzrationalen Funktion h dritten Grades hat den Wendepunkt W(0/5) und verläuft durch den Punkt P(1/8). Die Wendetangente enthält den Punkt Q(-1,25/0).
(Abitur 2006 AI)

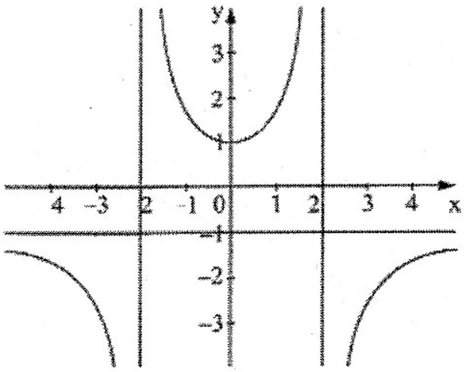
9.1 Zeigen Sie, dass die Wendetangente die Steigung $m_t = 4$ hat.

9.2 Bestimmen Sie den Funktionsterm h(x).

10. Eine ganzrationale Funktion r dritten Grades geht durch die Punkte B(-5/4) und C(0/0).
Außerdem liegt im Punkt $T(-1/-\frac{28}{25})$ ein Tiefpunkt vor.
Bestimmen Sie den Funktionsterm der Funktion r(x). (Abitur 2007 AI)

11. Gegeben ist die reelle Funktion $h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c$ mit reellen Konstanten a, b und c. Der Graph G_h dieser Funktion schneidet den Graphen der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}(x^2 - 4)^2$ auf der y-Achse und besitzt bei $x_0 = -2$ einen Terrassenpunkt.
Bestimmen Sie den Funktionsterm h(x). (Abitur 2007 AII)

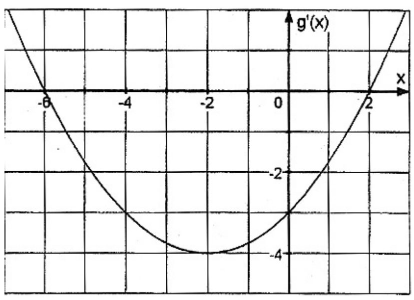
12.0 In der untenstehenden Zeichnung ist der Graph einer gebrochenrationalen Funktion $g : x \mapsto g(x)$ mit $D_g = R \setminus \{-2;2\}$ abgebildet. Der Graph ist achsensymmetrisch zur y-Achse. Alle weiteren Eigenschaften können der Zeichnung entnommen werden. (Abitur 2003 AII 13NT)



12.1 Bestimmen Sie einen Funktionsterm g(x), wenn Zähler und Nenner jeweils Polynome zweiten Grades sind.

12.2 Stellen Sie fest, ob Zähler und Nenner von g(x) auch jeweils Polynome der Form $ax^3 + bx$ $(a \in R \setminus \{0\}, b \in R)$ sein können und begründen Sie Ihre Aussage.

13.0 Die untere Abbildung zeigt den Graphen der 1. Ableitungsfunktion g′ der Funktion $g(x) = ax^3 + bx^2 + cx$.



13.1 Berechnen Sie mit Hilfe der Zeichnung den Funktionsterm g(x) der Funktion g.

13.2 Der Graph von g besitzt offensichtlich die Nullstelle x = 0. Begründen Sie ohne weitere Rechnung, dass es für x > 0 eine weitere Nullstelle von g geben muss.

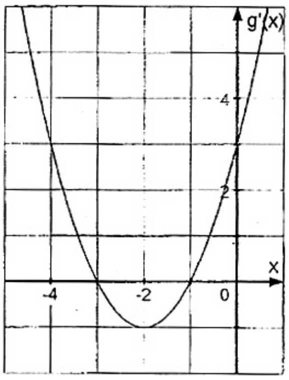
13.3 Begründen Sie ohne Rechnung mit Hilfe obiger Zeichnung, an welcher Stelle der Graph von g eine Wendestelle hat.

14. Von der ganzrationalen Funktion f dritten Grades ist die zweite Ableitung

$f''(x) = \frac{3}{2}x - \frac{9}{2}$ gegeben.

Der Graph G_f schneidet die x-Achse an der Stelle $x_1 = -1$ und die y-Achse im Punkt $P(0 / \frac{5}{4})$. Bestimmen Sie den Funktionsterm f(x). (Abitur 2009 AI)

15.0 Untenstehende Zeichnung gibt den Graphen der Ableitungsfunktion g´ einer ganzrationalen Funktion g dritten Grades an. (Abitur 2009 AII)



15.1 Begründen Sie anhand der Zeichnung, an welcher Stelle (Abszisse) der Graph der Funktion g einen Hochpunkt, an welcher Stelle er einen Tiefpunkt und an welcher Stelle er einen Wendepunkt besitzt.

15.2 Berechnen Sie mit Hilfe geeigneter aus der Zeichnung abgelesener Punktkoordinaten den Funktionsterm g´(x) und anschließend den Funktionsterm g(x) derjenigen Funktion g, deren Wendepunkt auf der x-Achse liegt.

16. Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^3 + bx + c$.

Der Punkt P(-2/3) liege auf G_f. Die Steigung bei –2 sei 1.

17. Gegeben sei die Funktion $f(x) = ax^4 + bx^2 + 4$.

Die Steigung bei 1 sei 2. Der Punkt $(0{,}5\sqrt{2} / y_0)$ sei ein Flachpunkt des Graphen.

Bestimmen Sie a und b und zeichnen Sie den Graphen.

18. f sei eine Polynomfunktion 3. Grades.

G_f verläuft durch (1/4). W(3/6) ist Wendepunkt des Graphen.

Die Tangente am Kurvenpunkt mit der Abszisse 4 verläuft waagrecht.

Bestimmen Sie den Funktionsterm.

19. Der Graph G_f einer Polynomfunktion 3. Grades enthält den Punkt (0/-2).
Der Punkt ($2/y_0$) ist Wendepunkt und $3x + y = 6$ ist Wendetangente an G_f.

20. Bestimmen Sie a, b und d so, dass (1/-13) Wendepunkt und $y = -24x + 11$ Wendetangente des Graphen von f mit $f(x) = ax^3 - bx^2 - 18x + d$ wird.

21. In der Funktionsgleichung $f(x) = ax^2 + bx$ sind die Parameter a und b so zu bestimmen, dass die Kurve die Gerade mit der Gleichung $6x - 5y + 4 = 0$ im Punkt P(2/p) berührt.
Bestimmen Sie das Extremum und die Schnittpunkte mit der x-Achse.

22. Der Graph einer Funktion 3. Grades hat im Punkt A(3/a) die Gerade $y = 11x - 27$ als Tangente und im Punkt W(1/0) einen Wendepunkt.
Bestimmen Sie die Gleichung der Funktion, die Nullstellen, die Koordinaten der Hoch- und Tiefpunkte und die Gleichung der Wendetangente.

Lösungen

1. Allgemeine Parabelgleichung: $p(x) = ax^2 + bx + c$;
   Bedingungen:
   $(I)\quad N(6/0) \in G_p \quad \Rightarrow 0 = a \cdot 6^2 + b \cdot 6 + c \quad \Rightarrow 36a + 6b + c = 0$

   $(II)\quad S(3/y_S) \in G_p$

   $$y_S = f(3) = -\frac{1}{9} \cdot 3^3 + \frac{2}{3} \cdot 3^2 = -3 + 6 = 3 \quad \Rightarrow S(3/3)$$

   $$\Rightarrow 3 = a \cdot 3^2 + b \cdot 3 + c \quad \Rightarrow 9a + 3b + c = 3$$

   (III) Scheitel ist Extrempunkt $\Rightarrow p'(3) = 0$

   $$p'(x) = 2ax + b \quad \Rightarrow 2a \cdot 3 + b = 0 \quad \Rightarrow 6a + b = 0$$

   $(I)\quad 36a + 6b + c = 0$

   $(II)\quad 9a + 3b + c = 3$

   $(III)\quad 6a + b = 0$

   $(I) - (II) : (I')\quad 27a + 3b = -3$

   $(I') - 3 \cdot (III):\quad 9a = -3 \quad \Rightarrow a = -\frac{1}{3}$

   $\Rightarrow 6 \cdot (-\frac{1}{3}) + b = 0 \quad \Rightarrow b = 2$

   $\Rightarrow 9 \cdot (-\frac{1}{3}) + 3 \cdot 2 + c = 3 \quad \Rightarrow c = 0$

   $\Rightarrow p(x) = -\frac{1}{3}x^2 + 2x$

2. Allgemeine Parabelgleichung: $p(x) = ax^2 + bx + c$;
Bedingungen:

$(I)\quad P_1(1/y) \in G_p$

$$y = f(1) = \frac{1}{3}(1^3 - 3\cdot 1^2 - 9\cdot 1 + 2) = \frac{1}{3}(1 - 3 - 9 + 2) = -3 \Rightarrow P_1(1/-3)$$

$$\Rightarrow -3 = a\cdot 1^2 + b\cdot 1 + c \Rightarrow a + b + c = -3$$

$(II)\quad P_2(4/y) \in G_p$

$$y = f(4) = \frac{1}{3}(4^3 - 3\cdot 4^2 - 9\cdot 4 + 2) = \frac{1}{3}(64 - 48 - 36 + 2) = -6 \Rightarrow P_2(4/-6)$$

$$\Rightarrow -6 = a\cdot 4^2 + b\cdot 4 + c \Rightarrow 16a + 4b + c = -6$$

$(III)\ p'(3)=-2$

$$p'(x)=2ax+b \ \Rightarrow 2a\cdot 3 + b = -2 \ \Rightarrow 6a + b = -2$$

$(I)\quad a + b + c = -3$

$(II)\ 16a + 4b + c = -6$

$(III)\ 6a + b = -2$

$(II) - (I) : (II')\ 13a + 3b = -3$

$(II') - 3\cdot(III) : -3a = 3 \ \Rightarrow a = -1$

$\Rightarrow 6\cdot(-1) + b = -2 \Rightarrow b = 4$

$\Rightarrow -1 + 4 + c = -3 \Rightarrow c = -6$

$\Rightarrow p(x) = -x^2 + 4x - 6$

3. Allgemeine Parabelgleichung: $p(x) = ax^2 + bx + c$;
Bedingungen:

$(I)\quad p(-x) = p(x) \ \Rightarrow a(-x^2) + b(-x) + c = ax^2 + bx + c$

$$\Rightarrow ax^2 - bx + c = ax^2 + bx + c$$

$$\Rightarrow -bx = bx \quad 2bx = 0 \quad b = 0$$

$(II)\quad p(3) = 0 \ \Rightarrow a\cdot 3^2 + b\cdot 3 + c = 0 \ \Rightarrow 9a + 3b + c = 0$

$(III)\ p(0) = -3 \ \Rightarrow a\cdot 0^2 + b\cdot 0 + c = -3 \ \Rightarrow c = -3$

$b = 0, c = -3\ in\ (II) : 9a - 3 = 0 \ \Rightarrow a = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow p(x) = \frac{1}{3}x^2 - 3$

4.

$$g(x)=\frac{1}{4}(-x^3+ax^2+bx+c)$$

$$g'(x)=\frac{1}{4}(-3x^2+2ax+b)$$

$$(I)\quad g(2)=0\quad\Rightarrow\frac{1}{4}(-8+4a+2b+c)=0\quad\Rightarrow 4a+2b+c=8$$

$$(II)\quad g(4)=-5\quad\Rightarrow\frac{1}{4}(-64+16a+4b+c)=-5\quad\Rightarrow 16a+4b+c=44$$

$$(III)\ g'(4)=0\quad\Rightarrow\frac{1}{4}(-48+8a+b)=0\quad\Rightarrow 8a+b=48$$

$$(I)\quad 4a+2b+c=8$$

$$(II)\quad 16a+4b+c=44$$

$$(III)\quad 8a+b=48$$

$$(II)-(I):(II')\quad 12a+2b=36$$

$$2\cdot(III)-(II'):\quad 4a=60\quad\Rightarrow a=15$$

$$\Rightarrow 8\cdot 15+b=48\quad\Rightarrow b=-72$$

$$\Rightarrow 4\cdot 15+2\cdot(-72)+c=8\quad\Rightarrow c=92$$

$$\Rightarrow g(x)=\frac{1}{4}(-x^3+15x^2-72x+92)$$

5.

$$p(x)=ax^2+bx+c$$

$$p'(x)=2ax+b$$

$$(I)\qquad p(-4)=0\quad\Rightarrow 16a-4b+c=0$$

$$(II)\quad p(0)=4\quad\Rightarrow c=4$$

$$(III)\quad p'(0)=\frac{1}{3}\quad\Rightarrow b=\frac{1}{3}$$

$$c\ und\ b\ in\ (I)\Rightarrow 16a-\frac{4}{3}+4=0\quad\Rightarrow 16a=-\frac{8}{3}\quad\Rightarrow a=-\frac{1}{6}$$

$$\Rightarrow p(x)=-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{3}x+4$$

6.

$p(x) = ax^2 + bx + c$

$p'(x) = 2ax + b$

$(I) \quad p(-3) = 9 \quad \Rightarrow 9a - 3b + c = 9$

$(II) \quad p(3) = 1 \quad \Rightarrow 9a + 3b + c = 1$

$(III) \quad p'(3) = 0 \quad \Rightarrow 6a + b = 0$

$(I) \quad 9a - 3b + c = 9$

$(II) \quad 9a + 3b + c = 1$

$(III) \quad 6a + b = 0$

$(II) - (I) : (II') \quad 6b = -8 \quad \Rightarrow b = -\frac{4}{3}$

$\Rightarrow 6 \cdot a - \frac{4}{3} = 0 \quad \Rightarrow a = \frac{2}{9}$

$\Rightarrow 9 \cdot \frac{2}{9} - 3 \cdot (-\frac{4}{3}) + c = 9 \quad \Rightarrow c = 3$

$\Rightarrow p(x) = \frac{2}{9}x^2 - \frac{4}{3}x + 3$

7.1 Für die Funktionsgleichung gilt allgemein: $k(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

Die gegebenen Eigenschaften führen zu folgenden Gleichungen:

$(I) \quad k(0) = 3 \quad \Rightarrow d = 3$

$(II) \quad k(1) = 22 \quad \Rightarrow a + b + c + 3 = 22$

$(III) \quad k(2) = 29 \quad \Rightarrow 8a + 4b + 2c + 3 = 29$

$(IV) \quad k(3) = 30 \quad \Rightarrow 27a + 9b + 3c + 3 = 30$

$(II) \quad a + b + c = 19$

$(III) \quad 8a + 4b + 2c = 26$

$(IV) \quad 27a + 9b + 3c = 27$

$(III) - 2 \cdot (II) : (III') \quad 6a + 2b = -12$

$(IV) - 3 \cdot (II) : (IV') \quad 24a + 6b = -30$

$(IV') - 3 \cdot (III') : \quad 6a = 6 \quad \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow 6 \cdot 1 + 2b = -12 \quad \Rightarrow b = -9$

$\Rightarrow 1 - 9 + c = 19 \quad \Rightarrow c = 27$

$\Rightarrow k(x) = x^3 - 9x^2 + 27x + 3$

7.2 $\frac{dk(x)}{dx} = 3x^2 - 18x + 27 \quad \Rightarrow 3x^2 - 18x + 27 = 0 \quad \Rightarrow 3(x-3)^2 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$

Skizze:

$$0 \le x < 3: \frac{dk(x)}{dx} > 0 \Rightarrow G_k \;\; steigt$$
$$3 < x \le 7: \frac{dk(x)}{dx} > 0 \Rightarrow G_k \;\; steigt$$
$$\Rightarrow G_k \;\; ist\ streng\ monoton\ zunehmend\ in\ [0;3] \cup [3;7]$$

$\Rightarrow$ k ist im gesamten Definitionsbereich [0;7] streng monoton zunehmend;

Bedeutung für die Gesamtkosten:
Mit zunehmender Produktmenge x nehmen die Gesamtkosten zu.

7.3 Berechnung der extremalen Steigung:

$$\frac{d^2k(x)}{d^2x} = 6x - 18 \quad \Rightarrow 6x - 18 = 0 \quad \Rightarrow x = 3$$

Skizze:

$$0 < x < 3: \frac{d^2k(x)}{d^2x} < 0 \quad \Rightarrow \text{Steigungen nehmen ab}$$
$$3 < x < 7: \frac{d^2k(x)}{d^2x} > 0 \quad \Rightarrow \text{Steigungen nehmen zu}$$

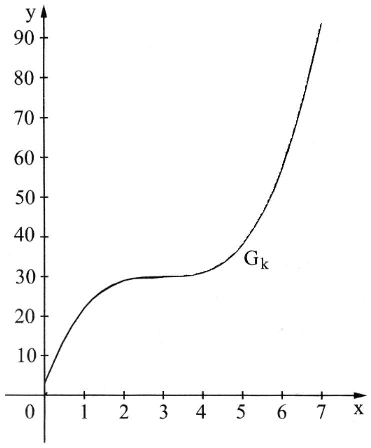
$\Rightarrow$ minimale Steigung bei x = 3 $\quad\quad \Rightarrow P(3;30)$

Da bei x = 3 die erste und zweite Ableitung Null sind, ist P ein Terrassenpunkt von G_k.

7.4

Wertetabelle

x	0	1	2	3	4	5	6	7
k(x)	3	22	29	30	31	38	57	94



8.

$$f'(x)=\frac{1}{8}x^3-2x+c \qquad f(x)=\frac{1}{32}x^4-x^2+cx+d$$

$$(I)\quad p(2)=\frac{9}{2} \quad \Rightarrow \frac{1}{2}-4+2c+d=\frac{9}{2} \quad \Rightarrow 2c+d=8$$

$$(II)\quad p'(x)=\frac{1}{6}x \quad \Rightarrow p'(2)=\frac{1}{3}=m_p$$

$$m_f\cdot m_p=-1 \quad \Rightarrow m_f=-3$$

$$f'(2)=-3 \quad \Rightarrow 1-4+c=-3 \quad \Rightarrow c=0$$

$$c=0 \;\; in \;\; (I) \quad \Rightarrow 2\cdot 0+d=8 \quad \Rightarrow d=8$$

$$\Rightarrow f(x)=\frac{1}{32}x^4-x^2+8$$

9.1 Der Wendepunkt W(0/5) und der Punkt Q(-1,25/0) liegen auf der Wendetangente

$$\Rightarrow m_t = \frac{5-0}{0-(-1{,}25)} = 4$$

9.2

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad h'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \qquad h''(x) = 6ax + 2b$$

$$(I) \quad h(0) = 5 \quad \Rightarrow d = 5$$

$$(II) \quad h'(0) = 4 \quad \Rightarrow c = 4$$

$$(III) \quad h''(0) = 0 \quad \Rightarrow b = 0$$

$$(IV) \quad h(1) = 8 \quad \Rightarrow a + b + c + d = 8$$

$$\Rightarrow a + 0 + 4 + 5 = 8 \quad \Rightarrow a = -1$$

$$\Rightarrow h(x) = -x^3 + 4x + 5$$

10)

$$r(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \qquad r'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$$

$$(I) \quad r(0) = 0 \quad \Rightarrow d = 0$$

$$(II) \quad r(-5) = 4 \quad \Rightarrow -125a + 25b - 5c + d = 4$$

$$(III) \quad r(-1) = -\frac{28}{25} \quad \Rightarrow -a + b - c + d = -\frac{28}{25}$$

$$(IV) \quad r'(-1) = 0 \quad \Rightarrow 3a - 2b + c = 0$$

$$\Rightarrow r(x) = \frac{4}{25}x^3 + \frac{36}{25}x^2 + \frac{12}{5}x$$

11)

$$h(x) = ax^3 + bx^2 + 3x + c \qquad h'(x) = 3ax^2 + 2bx + 3 \qquad h''(x) = 6ax + 2b$$

$$(I) \quad h(0) = 2 \quad \Rightarrow c = 2$$

$$(II) \quad h'(-2) = 0 \quad \Rightarrow 12a - 4b + 3 = 0$$

$$(III) \quad h''(-2) = 0 \quad \Rightarrow -12a + 2b = 0$$

$$(II) + (III) \quad -2b + 3 = 0 \quad \Rightarrow b = \frac{3}{2}$$

$$b \ \ in \ \ (III) \quad -12a + 2 \cdot \frac{3}{2} = 0 \quad \Rightarrow 12a = 3 \quad \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow h(x) = \frac{1}{4}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 3x + 2$$

12.1

$$g(x)=\frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$$

1) Achsensymmetrie zur y - Achse: $\mathrm{b}=0,\ \mathrm{e}=0 \quad \Rightarrow \mathrm{g(x)}=\dfrac{\mathrm{ax}^2+c}{dx^2+f}$

2) Tiefpunkt (0/1): $\mathrm{g}(0)=\dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{f}}=1 \quad \Rightarrow c=f \quad \Rightarrow \mathrm{g(x)}=\dfrac{\mathrm{ax}^2+c}{dx^2+c}$

3) Waagrechte Asymptote y = -1: $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}=-1 \quad \Rightarrow a=-d \quad \Rightarrow \mathrm{g(x)}=\dfrac{\mathrm{-dx}^2+c}{dx^2+c}$

4) Definitionslücken bei x = -2 und x = 2:

Nenner muss die Gestalt $\mathrm{d}\cdot(\mathrm{x}-2)\cdot(\mathrm{x}+2)=\mathrm{d}\cdot(\mathrm{x}^2-4)$ haben

Mit z.B. d = 1 folgt: $\mathrm{g(x)}=\dfrac{\mathrm{-x}^2-4}{x^2-4}$

12.2

$$g(x)=\frac{ax^3+bx}{cx^3+dx}=\frac{x(ax^2+b)}{x(cx^2+d)}$$

Diese Funktion g(x) hätte bei x = 0 eine stetig behebbare Definitionslücke, dies ist aber in der Zeichnung nicht vorgesehen. Zähler und Nenner können somit nicht Polynome der Gestalt $\mathrm{ax}^3+\mathrm{bx}$ sein.

13.1

$g(x)=ax^3+bx^2+cx \qquad g'(x)=3ax^2+2bx+c$

$(I) \quad g'(0)=-3 \qquad \Rightarrow c=-3$

$(II) \quad g'(-6)=0 \qquad \Rightarrow 108a-12b+c=0$

$(III) \quad g'(2)=0 \qquad \Rightarrow 12a+4b+c=0$

$\Rightarrow a=\dfrac{1}{12} \qquad b=\dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow g(x)=\dfrac{1}{12}x^3+\dfrac{1}{2}x^2-3x$

13.2

G_g ist streng monoton fallend in $]0;2]$ und G_g ist streng monoton steigend in $[2;\infty[$

$\Rightarrow$ Minimum bei $x = 2$

Es gilt, dass $x = 0$ Nullstelle ist und danach G_g fällt $\Rightarrow$ TP unterhalb der x - Achse.

Da g(x) eine Funktion 3.Grades mit positivem Koeffizienten vor x^3 ist, gilt also

für $x \to \infty \Rightarrow g(x) \to \infty$

$\Rightarrow G_g$ muss die x - Achse noch einmal schneiden, also eine weitere Nullstelle für $x > 0$

13.3

x_W ist Wendestelle von g, wenn x_W eine Extremstelle von $g'(x)$ ist

$\Rightarrow x = -2$ (Scheitelpunkt)

14.

$f'(x) = \frac{3}{4}x^2 - \frac{9}{2}x + a \qquad f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 + ax + b$

$P(0/\frac{5}{4}) \Rightarrow b = \frac{5}{4}$

$Q(-1/0) \Rightarrow \frac{1}{4}(-1)^3 - \frac{9}{4}(-1)^2 + a(-1) + \frac{5}{4} = 0 \;\Rightarrow a = -\frac{5}{4}$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{4}x^3 - \frac{9}{4}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{4}$

15.1

Extrema: $g'(x) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = -3 \quad x_2 = -1$

Monotonieverhalten:

G_g sms in]-∞;-3] sowie in [-1;∞[

G_g smf in [-3;-1]

$\Rightarrow x_1 = -3$ ist Hochpunkt und x_2=-1 ist Tiefpunkt

Bei $x_3 = -2$ hat g' eine Minimalstelle $\Rightarrow$ $x_3 = -2$ ist Wendestelle von g

15.2

$g'(x) = ax^2 + bx + c \quad S(-2/-1) \;\; P(-1/0)$

$\Rightarrow g'(x) = a(x+2)^2 - 1$

$P(-1/0)$ einsetzen: $0 = a((-1)+2)^2 - 1 \quad \Rightarrow a = 1$

$\Rightarrow g'(x) = (x+2)^2 - 1 = x^2 + 4x + 4 - 1 = x^2 + 4x + 3$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + d \qquad g(-2) = 0 \quad \Rightarrow d = \frac{2}{3}$

$\Rightarrow g(x) = \frac{1}{3}x^3 + 2x^2 + 3x + \frac{2}{3}$

16. $f(x)=\frac{1}{4}x^3+bx+c$ $\qquad$ $f'(x)=\frac{3}{4}x^2+b$

(I) $P(-2/3)\in G_f \Rightarrow f(-2)=3$

(II) Steigung bei x = -2 ist 1 $\Rightarrow$ f′(-2)=1

(I) -2 – 2b + c = 3
(II) 3 + b = 1

$\Rightarrow$ b = -2 und c = 1 $\Rightarrow f(x)=\frac{1}{4}x^3-2x+1$

17. $f(x)=ax^4+bx^2+4$

$f'(x)=4ax^3+2bx$

$f''(x)=12ax^2+2b$

(I) Steigung bei x = 1 ist 2 $\Rightarrow$ f′(1) = 2

(II) $P(0{,}5\sqrt{2}/y_0)$ ist Flachpunkt $\Rightarrow$ $f''(0{,}5\sqrt{2})=0$

(I) 4a + 2b = 2
(II) 6a + 2b = 0

$\Rightarrow$ a = -1 und b = 3 $\Rightarrow$ $f(x)=-x^4+3x^2+4$

18. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

(I) P(1/4) $\in G_f$ $\Rightarrow$ f(1) = 4

(II) W(3/6) ist Wendepunkt $\Rightarrow$ f´´(3) = 0

(III) W(3/6) $\in G_f$ $\Rightarrow$ f(3) = 6

(IV) bei x = 4 waagrechte Tangente $\Rightarrow$ f´(4) = 0

(I) a + b + c + d = 4
(II) 18a + 2b = 0
(III) 27a + 9b + 3c + d = 6
(IV) 48a + 8b + c = 0
$\Rightarrow$ a = 1, b = -9, c = 24 und d = -12 $\Rightarrow$ $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 12$
Prüfung, ob bei W(3/6) wirklich ein Wendepunkt vorliegt.

19. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

(I) P(0/-2) $\in G_f$ $\Rightarrow$ f(0) = -2

(II) Q(2/y_0) Wendepunkt $\Rightarrow$ f´´(2) = 0
(III) 3x + y = 6 Wendetangente
y = -3x + 6 $\Rightarrow$ f´(2) = -3
(IV) Q(2/y_0) $\in G_f$ $\Rightarrow$ Q(2/0) $\in G_f$ (Errechnen aus Wendetangente) $\Rightarrow$ f(2) = 0

(I) d = -2
(II) 12a +2b = 0
(III) 12a + 4b + c = -3
(IV) 8a + 4b + 2c + d = 0
$\Rightarrow$ $a = 1; b = -6; c = 9$ $\Rightarrow$ $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 2$
Prüfung, ob P(2/y_0) Wendepunkt ist;

20. $f(x) = ax^3 - bx^2 - 18x + d$

$f'(x) = 3ax^2 - 2bx - 18$

$f''(x) = 6ax - 2b$

(I) (1/-13) Wendepunkt $\Rightarrow$ f´´(1) = 0

(II) (1/-13) $\in G_f$ $\Rightarrow$ f(1) = -13

(III) y = -24x +11 ist Wendetangente $\Rightarrow$ f´(1) = -24

(I) 6a – 2b = 0
(II) a – b –18 + d = -13
(III) 3a - 2b –18 = -24

$\Rightarrow$ a = 2; b = 6 und d = 9 $\Rightarrow$ $f(x) = 2x^3 - 6x^2 - 18x + 9$

Prüfung, ob (1/-13) Wendepunkt ist;

21. $f(x) = ax^2 + bx$

$f'(x) = 2ax + b$

(I) G_f berührt $y = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$ $\Rightarrow$ $y = \frac{6}{5}x + \frac{4}{5}$ ist Tangente im Punkt P(2/p)

$\Rightarrow f'(2) = \frac{6}{5}$

(II) P(2/p) $\in G_f$ $\Rightarrow$ $f(2) = \frac{16}{5}$ (p berechnen aus der Tangente)

(I) 4a + b = $\frac{6}{5}$

(II) 4a + 2b = $\frac{16}{5}$

$\Rightarrow$ a = $-\frac{1}{5}$ und b = 2 $\Rightarrow$ $y = -\frac{1}{5}x^2 + 2x$

Extremum: bei x = 5 liegt ein Hochpunkt vor
Schnittpunkte mit der x-Achse: $x_1 = 0$ und $x_2 = 10$

22. $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

$f''(x) = 6ax + 2b$

(I) in A(3/a) Gerade y = 11x – 27 als Tangente $\Rightarrow$ f′(3) = 11

(II) A(3/a) $\in G_f$ $\Rightarrow$ f(3) = 6 (aus Tangente berechnen!)

(III) W(1/0) ist Wendepunkt $\Rightarrow$ f′′(1) = 0

(IV) W(1/0) $\in G_f$ $\Rightarrow$ f(1) = 0

(I) 27a + 6b + c = 11
(II) 27a + 9b + 3c + d = 6
(III) 6a + 2b = 0
(IV) a + b + c + d = 0

$\Rightarrow$ a = 1; b = -3; c = 2 und d = 0 $\Rightarrow$ $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

Prüfung, ob W(1/0) Wendepunkt;

Nullstellen: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ und $x_3 = 2$

Extrema: TP $(1 + \frac{\sqrt{3}}{3} / -\frac{2\sqrt{3}}{9})$ und HP $(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} / \frac{2\sqrt{3}}{9})$

Wendetangente: y = -x + 1