Aufgaben zum Gaußschen Algorithmus

1. Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme.

a) (I) $4x_1 + 7x_2 + 12x_3 = -5$
(II) $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4$
(III) $2x_1 + x_2 + 9x_3 = 0$

b) (I) $2x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$
(II) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 0{,}5 = 0$
(III) $-x_1 - 2x_2 - x_3 - 4 = 0$

c) (I) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
(II) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$
(III) $4x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 0$

d) (I) $x_1 = x_3$
(II) $x_2 = - x_1$
(III) $2x_1 + 4x_2 - 33x_3 = -25$

e) (I) $8x_1 - 4x_2 + x_3 = 7$
(II) $-5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 21$
(III) $-3x_1 + x_2 - 8x_3 = -56$

f) (I) $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$
(II) $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1$
(III) $6x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

g) (I) $3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$
(II) $4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$
(III) $-2x_1 + x_2 - x_3 = -1$

h) (I) $3x_1 + x_2 = 3$
(II) $x_1 - x_2 = -1$
(III) $2x_1 + 4x_2 = 7$

i) (I) $-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$
(II) $3x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0{,}5$

j) (I) $3x_1 + 9x_2 - 3x_3 = 15$
(II) $-8x_1 - 19x_2 + 3x_3 = 3$
(III) $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0$

2. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem ($t \in R$).
$(I)\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$(II)\quad (t-1)x_2 + (t^2+1)x_3 = 0$
$(III)\quad tx_1 + x_2 - x_3 = 0$

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen dieses linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

3. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $a \in \mathbb{R}$.
$(I)\quad x_1 - x_2 - x_3 = -4$
$(II)\quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$
$(III)\quad x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus den Wert von a, für den das lineare Gleichungssystem keine Lösung hat.

4. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $t \in \mathbb{R}$.
$(I)\quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 9{,}5 = t$
$(II)\quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$
$(III)\quad t \cdot (x_1 + x_2) - 6x_3 + 3 = 0$

Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

5. Gegeben ist folgendes Gleichungssystem mit $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$:

$(I)\quad x_1 + 2x_2 + r^2 x_3 = 0$

$(II)\quad x_2 + 6x_3 = 1$

$(III)\quad x_1 - 4x_2 = -r$ wobei r ein reeller Parameter ist

Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen in Abhängigkeit von r. (Abitur 2005 BII)

6. Bestimmen Sie, für welches $k \in \mathbb{R}$ die folgenden linearen Gleichungssysteme nur trivial lösbar sind.

a)

$(I)\quad kx_1 + 2kx_2 = 0$

$(II)\quad x_1 + x_2 + 3kx_3 = 0$

$(III)\quad kx_2 + x_3 = 0$

b)

$(I)\quad kx_1 + 2x_2 + x_3 = 0$

$(II)\quad 2x_1 + kx_2 - x_3 = 0$

$(III)\quad x_2 - x_3 = 0$

7. Bestimmen Sie die Lösungsmenge der Gleichungssystems $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ für

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix},\ \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}.$$

8. In drei Teilgebieten eines Betriebes wird je ein Produkt gefertigt. Die zugehörige Matrix M gibt die Verflechtung der drei Teilbetriebe unter sich und mit dem Markt an.
Berechnen Sie den Vektor $\vec{x}$ für die erforderliche Gesamtproduktion aus der Gleichung $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$, wenn der Konsumvektor $\vec{b}$ für die externe Nachfrage nach den drei Produkten steht:

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \text{ und } \vec{b} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 6700 \\ 800 \end{pmatrix}.$$

9. Ein Konditor stellt Kuchenböden aus Biskuitteig, Hefeteig, Mürbteig oder Rührteig her. Lässt man die kleineren Zutaten wie Vanillinzucker, Backpulver oder Hefe außer Betracht, so lassen sich die Zutaten für jeweils einen Kuchenboden in der folgenden Tabelle notieren (Zutaten in g pro Stück und Eier in Stück pro Stück):

	Biskuitteig	**Hefeteig**	**Mürbteig**	**Rührteig**
Mehl	250	500	300	300
Butter	0	60	200	200
Zucker	180	60	100	180
Eier	4	1	0	4

Der Konditor stellt fest, dass er noch 6,7 kg Mehl, 2,92 kg Butter, 3,08 kg Zucker und 50 Eier hat.
Bestimmen Sie, wie viele Böden jeder Teigsorte der Konditor backen kann, wenn er alle Rohmaterialien aufbrauchen soll.

10. In einer Firma werden vier Arten A, B, C und D von Produkten in drei verschiedenen Betrieben gefertigt. Die Tabelle gibt Auskunft über die Arbeitsstunden pro Werkstück:

	A	**B**	**C**	**D**
Betrieb 1	2	6	0	2
Betrieb 2	6	8	5	1
Betrieb 3	0	1	2	3

Kurz vor den Werksferien stellt der Firmenleiter fest, wie viele Arbeitsstunden noch bis zu den Ferien in den Betrieben geleistet werden können.
In Betrieb 1 sind es noch 54, in Betrieb 2 noch 72 und in Betrieb 3 noch 49 Stunden. Bestimmen Sie, wie viele Stücke der Produkte A, B, C und D der Firmenleiter noch in Auftrag geben kann, wenn keine ungefertigten Werkstücke liegen bleiben und die Arbeitsstunden voll ausgenutzt werden sollen.

a) Stellen Sie zunächst das zugehörige Gleichungssystem auf.

b) Geben Sie an, welche Besonderheit dieses Gleichungssystem aufweist.

c) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Gleichungssystems.

d) Geben Sie alle konkreten Lösungen an, die das praktische Beispiel sinnvoll lösen.

11. Ein Teehändler möchte eine hochwertige Teemischung zu einem Preis von 8,60 € je kg herstellen. Er verwendet dafür grünen Tee zum Preis von 11,00 Euro je kg, Roibuschtee zum Preis von 9,50 Euro je kg und Früchtetee zum Preis von 6,50 Euro je kg. Der Teehändler stellt immer 12 kg-Packungen solcher Teemischungen her. (Abitur 2008 BI)

a) Berechnen Sie, wie viel Früchte- bzw. Roibuschtee in einer 12 kg-Packung sind, die 2 kg Grüntee enthält.

b) Ermitteln Sie, welche Mengen der drei Teesorten zu den oben genannten Preisen in einer beliebigen 12 kg-Packung überhaupt möglich sind.

c) Prüfen Sie, ob es eine 12 kg-Packung gibt, die durch Zusammenschütten kompletter Kilogrammpäckchen von allen drei Teesorten entsteht.

12. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem ($x_1, x_2, x_3, k \in \mathbb{R}$):

$(I)\quad x_1 + x_2 - x_3 = 1$

$(II)\quad x_2 + (2+k)x_3 = 1$ (Abitur 2004 BII)

$(III)\quad (6 - k - k^2)x_3 = 2 - k$

a) Ermitteln Sie die Werte von k, für welche das System keine, eine oder mehr als eine Lösung hat.

b) Bestimmen Sie die Lösungsmenge für k = 2.

13. Gegeben ist das lineare Gleichungssystem ($x_1, x_2, x_3, m \in \mathbb{R}$):

$(I)\quad x_1 + 4x_2 + x_3 - 12 = 0$

$(II)\quad x_2 + x_3 - 11 = 0$ (Abitur 2006 BII)

$(III)\quad 3x_2 + (m-1)x_3 + m - 37 = 0$

Ermitteln Sie in Abhängigkeit von m die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems.

14. Drei 13. Klassen einer Fach- und Berufsoberschule gehen zu einem Imbissstand zum Essen und geben den Inhalt ihrer Klassenkassen von jeweils 108 € aus. Es werden drei Speisen angeboten: Leberkässemmel (L), Pizza (P) und Gyros (G). Die Tabelle zeigt die jeweils bestellten Mengen.
Berechnen Sie die Preise der einzelnen Speisen. (Abitur 2009 BI)

	L	P	G
13a	9	9	9
13b	5	9	11
13c	12	8	9

Lösungen

1.a) $L=\left\{(\frac{1}{2};-1;0)\right\}$ b) $L=\left\{(\frac{9}{4};-\frac{35}{12};-\frac{5}{12})\right\}$ c) $L=\{(0;0;0)\}$

d) $L=\left\{(\frac{5}{7};-\frac{5}{7};\frac{5}{7})\right\}$ e) $L=\{(0;0;7)\}$

f) $x_1=\frac{1}{5}-\frac{1}{10}x_3; x_2=-\frac{3}{5}+\frac{4}{5}x_3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

g) $x_1=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}x_3; x_2=-\frac{1}{5}+\frac{3}{5}x_3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

h) $L=\left\{(\frac{1}{2};\frac{3}{2})\right\}$ i) $x_1=-1+29x_3; x_2=0{,}5-12x_3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

j) $L=\varnothing$

2.

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & t^2+1 & 0 \\ 0 & t-1 & t+1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & t^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-t & 0 \end{array}\right)$$

1. $t^2-t=0 \Rightarrow t(t-1)=0 \Rightarrow t_1=0 \quad t_2=1$

   $\Rightarrow$ für diese beiden Werte hat das lineare Gleichungssysteme unendlich viele Lösungen

2. $t^2-t\neq 0 \quad \Rightarrow t\in R|\{0;1\}$

   $\Rightarrow$ für diese Werte hat das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung

3.

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & a+1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & a-5 & -17 \end{array}\right)$$

$a-5=0 \quad \Rightarrow a=5 \quad \Rightarrow (III)\ 0\ \ 0\ \ 0 | -17$

$\Rightarrow$ für a = 5 hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung

4.

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & t-9{,}5 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \\ t & t & -6 & -3 \end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & t-9{,}5 \\ 0 & 3 & -6 & t+2{,}5 \\ 0 & 3t & -2t-6 & 6t-3 \end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & t-9{,}5 \\ 0 & 3 & -6 & t+2{,}5 \\ 0 & 0 & 4t-6 & -t^2+3{,}5t-3 \end{array}\right)$$

$4t-6=0 \Rightarrow t=1{,}5 \Rightarrow (III)\ 0\ \ 0\ \ 0 | 0$

$\Rightarrow$ für t = 1,5 hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ für t $\neq$ 1,5 (auch für t = 0) hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung

5.

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & -4 & 0 & -r \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & -6 & -r^2 & -r \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & r^2 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 36-r^2 & 6-r \end{array}\right)$$

$36 - r^2 = 0 \Rightarrow r_1 = -6 \quad r_2 = 6$

$r = -6 \Rightarrow (III)\, 0\ 0\ 0 | 12$ $\Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung

$r = 6 \Rightarrow (III)\, 0\ 0\ 0 | 0$ $\Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$r \in \mathbb{R} \setminus \{-6;6\}$ $\Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung

6a) $k \neq 0$

6b) $k \neq -2$ oder $k \neq 3$

7.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 3 & 1 & 6 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ 6 \\ 21 \end{pmatrix}$$

$(I)\quad x_1 + x_2 + x_3 = 8$

$(II)\quad x_1 - x_2 + 3x_3 = 6$

$(III)\ 3x_1 + x_2 + 6x_3 = 21$

$\Rightarrow L = \{(9/0/-1)\}$

8.

$$\begin{pmatrix} 0{,}6 & -0{,}2 & -0{,}2 \\ -0{,}1 & 0{,}8 & -0{,}1 \\ -0{,}4 & -0{,}1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} 1800 \\ 6700 \\ 800 \end{pmatrix}$$

$(I)\quad 0{,}6x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}2x_3 = 1800$

$(II)\ -0{,}1x_1 + 0{,}8x_2 - 0{,}1x_3 = 6700$

$(III)\ -0{,}4x_1 - 0{,}1x_2 + x_3 = 800$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 8000 \\ 10000 \\ 5000 \end{pmatrix}$$

9. Es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad 250x_1 + 500x_2 + 300x_3 + 300x_4 = 6700 \;\Big|\; :50\\
&(II) \qquad\qquad 60x_2 + 200x_3 + 200x_4 = 2920 \;\Big|\; :20\\
&(III)\; 180x_1 + 60x_2 + 100x_3 + 180x_4 = 3080 \;\Big|\; :20\\
&(IV)\; 4x_1 + x_2 + 4x_4 = 50
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&(I) \quad 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 134\\
&(II) \qquad\qquad 3x_2 + 10x_3 + 10x_4 = 146\\
&(III)\; 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 154\\
&(IV)\; 4x_1 + x_2 + 4x_4 = 50
\end{aligned}
$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$x_1 = 6 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 8 \qquad x_4 = 6$

Der Konditor kann also mit seinen Zutaten sechs Biskuitteig-, zwei Hefeteig-, acht Mürbteig- und sechs Rührteigböden herstellen.

10a)

$(I)\ \ 2x_1 + 6x_2 + 2x_4 = 54$

$(II)\ \ 6x_1 + 8x_2 + 5x_3 + x_4 = 72$

$(III)\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 49$

10b) Es handelt sich um ein unterbestimmtes Gleichungssystem.

10c) wähle $x_4 = t \quad \Rightarrow x_1 = 2t - 24 \quad x_2 = 17 - t \quad x_3 = 16 - t$

10d) Es kommen nur natürliche Zahlen als Lösungen in Frage. Aus der Gleichung für x_1 folgt daher die Bedingung $t \geq 12$, aus der Gleichung für x_3 die Bedingung $t \leq 16$.

11a) x_1: Menge grüner Tee in kg; x_2: Menge Roibuschtee in kg; x_3: Menge Früchtetee in kg

$(I)\ 11x_1 + 9{,}50x_2 + 6{,}50x_3 = 12 \cdot 8{,}60$

$(II)\ x_1 + x_2 + x_3 = 12$

$(I)\ 22 + 9{,}50x_2 + 6{,}50x_3 = 103{,}20$

$(II)\ 2 + x_2 + x_3 = 12$

$(I)\ 9{,}50x_2 + 6{,}50x_3 = 81{,}20$

$(II)\ x_2 + x_3 = 10$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 9{,}5 & 6{,}5 & 81{,}2 \\ 1 & 1 & 10 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 9{,}5 & 6{,}5 & 81{,}2 \\ 0 & 3 & 13{,}8 \end{array}\right)$$

$(II) \Rightarrow 3x_3 = 13{,}80 \quad \Rightarrow x_3 = 4{,}6$

$(I) \Rightarrow x_2 = 5{,}4$

In einer 12 kg-Packung sind 4,6 kg Früchtetee und 5,4 kg Roibuschtee enthalten.

11b)

$(I)\ 11x_1 + 9{,}50x_2 + 6{,}50x_3 = 12 \cdot 8{,}60$

$(II)\ x_1 + x_2 + x_3 = 12$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 9{,}5 & 6{,}5 & 103{,}2 \\ 1 & 1 & 1 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 11 & 9{,}5 & 6{,}5 & 103{,}2 \\ 0 & 1{,}5 & 4{,}5 & 28{,}8 \end{array}\right)$$

x_3 beliebig, z.B. $x_3 = k$

$(II) \Rightarrow 1{,}5x_2 + 4{,}5k = 28{,}8 \quad \Rightarrow x_2 = 19{,}2 - 3k$

$(I) \Rightarrow 11x_1 + 9{,}5x_2 + 6{,}5k = 103{,}2 \quad \Rightarrow x_1 = -7{,}2 + 2k$

$k \geq 0$

$19{,}2 - 3k \geq 0 \quad \Rightarrow k \leq 6{,}4$

$-7{,}2 + 2k \geq 0 \quad \Rightarrow k \geq 3{,}6$

$\Rightarrow k \in [3{,}6; 6{,}4]$

$\Rightarrow 0 \leq x_1 \leq 5{,}6 \qquad 0 \leq x_2 \leq 8{,}4 \qquad 3{,}6 \leq x_3 \leq 6{,}4$

11c)

Aus Aufgabe 10b) folgt: $x_3 \in \{4;5;6\}$

$\Rightarrow x_2 = 19{,}2 - 3 \cdot k \notin \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ es ist nicht möglich aus nur kompletten Kilopäckchen
eine 12 kg-Packung herzustellen.

12a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+k & 1 \\ 0 & 0 & 6-k-k^2 & 2-k \end{array}\right)$$

$6 - k - k^2 = 0 \quad \Rightarrow k_1 = 2 \qquad k_2 = -3$

$k = 2$: das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$k = -3$: das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung

$k \in \mathbb{R} \setminus \{-3;2\}$: das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung

12b)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$(III) \Rightarrow x_3 = t$ beliebig

$(II) \Rightarrow x_2 = 1 - 4t$

$(I) \Rightarrow x_1 = 5t$

$\Rightarrow L = \{(5t / 1 - 4t / t)\} \quad t \in \mathbb{R}$

13)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & m-1 & 37-m \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array}\right)$$

$m = 4$: das lineare Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen

$m \in \mathbb{R} \setminus \{4\}$: das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung

14)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 9 & 108 \\ 5 & 9 & 11 & 108 \\ 12 & 8 & 9 & 108 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 9 & 108 \\ 0 & 36 & 54 & 432 \\ 0 & -36 & -27 & -324 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 9 & 9 & 9 & 108 \\ 0 & 36 & 54 & 432 \\ 0 & 0 & 27 & 108 \end{array}\right)$$

$(III) \Rightarrow 27x_3 = 108 \quad \Rightarrow x_3 = 4$

$(II) \Rightarrow 36x_2 + 54 \cdot 4 = 432 \quad \Rightarrow x_2 = 6$

$(I) \Rightarrow 9x_1 + 9 \cdot 6 + 9 \cdot 4 = 108 \quad \Rightarrow x_1 = 2$

$\Rightarrow$ Die Leberkässemmel kostet 2 €, die Pizza 6 € und das Gyros 4 €.