Aufgaben zum Gaußschen Algorithmus

1. Berechnen Sie die Lösungsmengen folgender linearer Gleichungssysteme.

a) (I) $4x_1 + 7x_2 + 12x_3 = -5$
(II) $-2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -4$
(III) $2x_1 + x_2 + 9x_3 = 0$

b) (I) $2x_1 + x_2 - x_3 - 2 = 0$
(II) $3x_1 + 2x_2 + x_3 - 0{,}5 = 0$
(III) $-x_1 - 2x_2 - x_3 - 4 = 0$

c) (I) $x_1 + x_2 + x_3 = 0$
(II) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 0$
(III) $4x_1 + 9x_2 + 16x_3 = 0$

d) (I) $x_1 = x_3$
(II) $x_2 = - x_1$
(III) $2x_1 + 4x_2 - 33x_3 = -25$

e) (I) $8x_1 - 4x_2 + x_3 = 7$
(II) $-5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 21$
(III) $-3x_1 + x_2 - 8x_3 = -56$

f) (I) $2x_1 - x_2 + x_3 = 1$
(II) $4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1$
(III) $6x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$

g) (I) $3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0$
(II) $4x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 2$
(III) $-2x_1 + x_2 - x_3 = -1$

h) (I) $3x_1 + x_2 = 3$
(II) $x_1 - x_2 = -1$
(III) $2x_1 + 4x_2 = 7$

i) (I) $-x_1 - 2x_2 + 5x_3 = 0$
(II) $3x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0{,}5$

j) (I) $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 33$
(II) $x_1 + 4x_2 + 2x_3 + x_4 = 21$
(III) $3x_1 + 5x_2 + x_3 + 3x_4 = 37$
(IV) $5x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 36$

2.0 Gegeben ist das lineare Gleichungssystem
(I) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
(II) $2x_1 + 3x_2 + mx_3 = -1$
(III) $4x_1 + 9x_2 + m^2x_3 = 1$

2.1 Setzen Sie m = -1 und lösen Sie das erhaltene System.
2.2 Zeigen Sie, dass für m = 2 das System nicht lösbar ist.
2.3 Drücken Sie die Lösungswerte von x_1, x_2, x_3 mit Hilfe des Parameters m ($m \neq 2; m \neq 3$) aus.
2.4 In welchem Bereich darf m Werte annehmen, damit der in c) erhaltene x_1-Wert die Bedingung $x_1 > 1$ erfüllt ?

3. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem ($t \in R$).
$(I)\quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$
$(II)\quad (t-1)x_2 + (t^2+1)x_3 = 0$
$(III)\quad tx_1 + x_2 - x_3 = 0$

Bestimmen Sie die Anzahl der Lösungen dieses linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

4. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem ($a \in R$).

$(I) \quad x_1 - x_2 - x_3 = -4$

$(II) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$

$(III) \quad x_1 + 5x_2 + ax_3 = 0$

Berechnen Sie mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus den Wert von a, für den das lineare Gleichungssystem keine Lösung hat.

5. Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit $t \in \mathbb{R}$. (Abitur 2009 BI)

$(I) \quad 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 9,5 = t$

$(II) \quad x_1 - 2x_2 + 2x_3 + 6 = 0$

$(III) \quad t \cdot (x_1 + x_2) - 6x_3 + 3 = 0$

Ermitteln Sie die Anzahl der Lösungen dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von t.

6.0 Beim Druck mit einem Farbdrucker werden die Farbinformationen des Bildschirms, die im RGB-Farbmodell vorliegen, in eine geräteabhängige Form umgewandelt. Die Druckergrundfarben werden mit U, V und W bezeichnet. Die Umwandlung vom RGB-Modell in das UVW-Modell wird durch folgende Gleichung beschrieben:

$$M \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \text{mit } M = \begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad \text{und } \vec{b} = \begin{pmatrix} U \\ V \\ W \end{pmatrix} \quad \text{(Abitur 2008 BII)}$$

6.1 Zeigen Sie, dass das lineare Gleichungssystem $M \cdot \vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar ist.

6.2 Berechnen Sie für R = 100, G = 0 und B = 1 den Farbwert V und ermitteln Sie umgekehrt, welcher Farbwert B für die Druckausgabe U = 0, V = 4 und W = 2 notwendig ist.

6.3 Durch einen Fehler in einem Druckertreiber wird anstelle der zweiten Zeile der gegebenen Matrix M nochmals die erste Zeile verwendet. Erläutern Sie die Konsequenzen für die Lösbarkeit des linearen Gleichungssystems.

7. Ein Konditor stellt Kuchenböden aus Biskuitteig, Hefeteig, Mürbteig oder Rührteig her. Lässt man die kleineren Zutaten wie Vanillinzucker, Backpulver oder Hefe außer Betracht, so lassen sich die Zutaten für jeweils einen Kuchenboden in der folgenden Tabelle notieren (Zutaten in g pro Stück und Eier in Stück pro Stück):

	Biskuitteig	**Hefeteig**	**Mürbteig**	**Rührteig**
Mehl	250	500	300	300
Butter	0	60	200	200
Zucker	180	60	100	180
Eier	4	1	0	4

Der Konditor stellt fest, dass er noch 6,7 kg Mehl, 2,92 kg Butter, 3,08 kg Zucker und 50 Eier hat.
Bestimmen Sie, wie viele Böden jeder Teigsorte der Konditor backen kann, wenn er alle Rohmaterialien aufbrauchen soll.

8. Eine Einrichtungsfirma bietet Wandregale verschiedener Breite an. In der untenstehenden Tabelle sind die jeweils benötigten Materialien für die Wandregale aufgeführt.

	1m Regal	**2m Regal**	**3m Regal**	**4m Regal**
Seitenteile	2	3	4	5
Regalbretter	5	10	15	20
Kurze Schrauben	4	3	6	8
Lange Schrauben	0	5	15	35

Der Firmeninhaber beschließt nach einiger Zeit, ein neues Design für die Regale zu entwerfen und räumt deshalb das Lager mit den alten Regalen. Er hat noch 49 Seitenteile, 165 Regalbretter, 66 kurze Schrauben und 120 lange Schrauben auf Lager.
Bestimmen Sie, in welcher Regalzusammenstellung der Restbestand vollständig aufgebraucht wird.

9.0 Die folgenden Gleichungen I, II und III stellen jeweils Ebenen in Koordinatenform dar:

$(I)\quad x_1 + x_2 + 2x_3 = 3$

$(II)\quad x_2 + x_3 = 1$

$(III)\quad 2x_1 - x_2 + x_3 = c$ mit $c \in \mathbb{R}$

(Abitur 2011 BI)

9.1 Ermitteln Sie in Abhängigkeit von c die Anzahl der Lösungen des Gleichungssystems.

9.2 Bestimmen Sie für c = 3 die Lösung des Gleichungssystems und interpretieren Sie die gegenseitige Lage der drei Ebenen.

Lösungen

1.a) $L = \left\{ (\frac{1}{2}; -1; 0) \right\}$ b) $L = \left\{ (\frac{9}{4}; \frac{35}{12}; -\frac{5}{12}) \right\}$ c) $L = \{(0;0;0)\}$

d) $L = \left\{ (\frac{5}{7}; -\frac{5}{7}; \frac{5}{7}) \right\}$ e) $L = \{(0;0;7)\}$

f) $x_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{10}x_3; x_2 = -\frac{3}{5} + \frac{4}{5}x_3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

g) $x_1 = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x_3; x_2 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}x_3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

h) $L = \left\{ (\frac{1}{2}; \frac{3}{2}) \right\}$ i) $x_1 = -1 + 29x_3; x_2 = 0{,}5 - 12x_3 \Rightarrow$ unendlich viele Lösungen

j) $L = \{(5;3;1;2)\}$

2.1 $L = \{(0;0;1)\}$

2.2 (I) $x_1 + x_2 + x_3 = 1$
(II) $2x_2 = -6$
(III) $5x_2 = -3$
$\Rightarrow L = \{\ \}$

2.3 $$L = \left\{ \frac{4(m+1)}{m-2}; \frac{-3(m+1)}{m-3}; \frac{12}{(m-2)(m-3)} \right\}$$

2.4 $\frac{4(m+1)}{m-2} > 1 \Leftrightarrow 4(m+1) > m-2$ für $m > 2$

$\Leftrightarrow 4m + 4 > m - 2 \Leftrightarrow 3m > -6 \Leftrightarrow m > -2 \quad \Rightarrow m > 2$ (da die Ungleichung für m > 2 gilt !!)

$\frac{4(m+1)}{m-2} > 1 \Leftrightarrow 4(m+1) < m-2$ für $m < 2$

$\Leftrightarrow 4m + 4 < m - 2 \Leftrightarrow 3m < -6 \Leftrightarrow m < -2$

3.

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & t^2+1 & 0 \\ 0 & t-1 & t+1 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & t-1 & t^2+1 & 0 \\ 0 & 0 & t^2-t & 0 \end{array} \right)$$

1. $t^2 - t = 0 \quad \Rightarrow t(t-1) = 0 \quad \Rightarrow t_1 = 0 \qquad t_2 = 1$
   $\Rightarrow$ für diese beiden Werte hat das lineare Gleichungssysteme unendlich viele Lösungen
2. $t^2 - t \neq 0 \quad \Rightarrow t \in R | \{0;1\}$
   $\Rightarrow$ für diese Werte hat das lineare Gleichungssystem eine eindeutige Lösung

4.

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 6 & a+1 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & -4 \\ 0 & 2 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & a-5 & -17 \end{array}\right)$$

$a-5=0 \quad \Rightarrow a=5 \quad \Rightarrow (III) \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, -17$

$\Rightarrow$ für a = 5 hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung

5.

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & t-9,5 \\ 1 & -2 & 2 & -6 \\ t & t & -6 & -3 \end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & t-9,5 \\ 0 & 3 & -6 & t+2,5 \\ 0 & 3t & -2t-6 & 6t-3 \end{array}\right) \overset{t\neq 0}{\Rightarrow} \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & -2 & t-9,5 \\ 0 & 3 & -6 & t+2,5 \\ 0 & 0 & 4t-6 & -t^2+3,5t-3 \end{array}\right)$$

$4t-6=0 \Rightarrow t=1,5 \Rightarrow (III)\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \,|\, 0$

$\Rightarrow$ für t = 1,5 hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ für t $\neq$ 1,5 (auch für t = 0) hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung

6.1

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 5 & -1 & 0 \\ 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

$-5\cdot(I)+(II): \;\; 0 \;\; -16 \;\; -5$ neue 2. Zeile

$-2\cdot(I)+(III): \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1$ neue 3. Zeile

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -16 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{ das LGS hat genau eine Lösung}$$

6.2

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10+0,1 \\ 50 \\ 20+0,3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10,1 \\ 50 \\ 20,3 \end{pmatrix} \Rightarrow V=50$$

$$\begin{pmatrix} 0,1 & 0,3 & 0,1 \\ 0,5 & -0,1 & 0 \\ 0,2 & 0,6 & 0,3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0,1R+0,3G+0,1B \\ 0,5R-0,1G \\ 0,2R+0,6G+0,3B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$(I) \quad 0,1R+0,3G+0,1B=0$

$(II) \quad 0,5R-0,1G=4$

$(III) \quad 0,2R+0,6G+0,3B=2$

$\Rightarrow -2\cdot(I)+(III): \quad 0,1B=2 \quad \Rightarrow B=20$

6.3

$(I) \quad 0{,}1R + 0{,}3G + 0{,}1B = U$

$(II) \quad 0{,}1R + 0{,}3G + 0{,}1B = V$

$(III) \quad 0{,}2R + 0{,}6G + 0{,}3B = W$

$\Rightarrow (I) - (II): \quad 0 = U - V$

1) $U - V = 0 \quad \Rightarrow U = V \quad \Rightarrow$ das LGS hat unendlich viele Lösungen

2) $\mathrm{U - V} \neq 0 \quad \Rightarrow \mathrm{U} \neq \mathrm{V} \quad \Rightarrow$ das LGS hat keine Lösung

7. Es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$(I) \quad 250x_1 + 500x_2 + 300x_3 + 300x_4 = 6700 \mid :50$

$(II) \quad 60x_2 + 200x_3 + 200x_4 = 2920 \mid :20$

$(III) \quad 180x_1 + 60x_2 + 100x_3 + 180x_4 = 3080 \mid :20$

$(IV) \quad 4x_1 + x_2 + 4x_4 = 50$

$(I) \quad 5x_1 + 10x_2 + 6x_3 + 6x_4 = 134$

$(II) \quad 3x_2 + 10x_3 + 10x_4 = 146$

$(III) \quad 9x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 9x_4 = 154$

$(IV) \quad 4x_1 + x_2 + 4x_4 = 50$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$x_1 = 6 \qquad x_2 = 2 \qquad x_3 = 8 \qquad x_4 = 6$

Der Konditor kann also mit seinen Zutaten sechs Biskuitteig-, zwei Hefeteig-, acht Mürbteig - und sechs Rührteigböden herstellen.

8. Es ergibt sich folgendes lineares Gleichungssystem:

$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 49$

$(II) \quad 5x_1 + 10x_2 + 15x_3 + 20x_4 = 165 \mid :5$

$(III) \quad 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 66$

$(IV) \quad 5x_2 + 15x_3 + 35x_4 = 120 \mid :5$

$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 49$

$(II) \quad x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 33$

$(III) \quad 4x_1 + 3x_2 + 6x_3 + 8x_4 = 66$

$(IV) \quad x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 24$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$x_1 = 4 \qquad x_2 = 8 \qquad x_3 = 3 \qquad x_4 = 1$

Man kann also mit den Restbeständen vier 1m Regale, acht 2m Regale, drei 3m Regale und ein 4m Regal herstellen.

9.1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & c \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & c-6 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & c-3 \end{array}\right)$$

$c = 3$: LGS hat unendlich viele Lösungen

$c \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$: LGS hat keine Lösung

9.2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x_3 = r$ beliebig

$(II) \Rightarrow x_2 + x_3 = 1 \quad \Rightarrow x_2 = 1 - r$

$(I) \Rightarrow x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \quad \Rightarrow x_1 + 1 - r + 2r = 3 \quad \Rightarrow x_1 = 2 - r$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } r \in \mathbb{R}$$

Die drei Ebenen schneiden sich in der Geraden s: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$