Aufgaben zum Skalarprodukt

1.0 Gegeben ist der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

1.1 Berechnen Sie $\vec{a}^{\,0}$ und $-\vec{a}^{\,0}$.

1.2 Berechnen Sie denjenigen Vektor der Länge 5 LE, der dieselbe Orientierung hat wie der Gegenvektor von $\vec{a}$.

2. Die Strecke $\overline{AB}$ mit A(6/2) und B(b_1/-2) hat die Länge 5 LE.
Berechnen Sie b_1 (2 Lösungen !!).

3. Ermitteln Sie, welche Punkte der x_1-Achse vom Punkt A(2/3) die Entfernung 5 LE haben.

4. Ermitteln Sie, welche Achsenpunkte von A(-2/5) und B(-4/-1) gleichen Abstand haben.

5. Bestimmen Sie den Umfang des Dreiecks ABC mit A(4/-2/7), B(1/-2/3) und C(3/2/-1).

6.0 Berechnen Sie die Innenwinkel des Dreiecks ABC.

6.1 A(-3/5), B(4/6), C(1/1)

6.2 A(-3/0/1), B(7/-1/-1), C(2/1/-3)

7. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 12 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$.
Prüfen Sie, ob diese beiden Vektoren senkrecht aufeinander stehen.

8. Ermitteln Sie, an welcher Ecke das Dreieck ABC mit A(5/0), B(-2/4), C(1/-2) rechtwinklig ist.

9. Gegeben sind die Eckpunkte A(2/-1/4), B(3/2/-6) und C(-5/0/2) eines Dreiecks ABC.
Berechnen Sie die Längen der Seitenhalbierenden.

10. Gegeben sind die vier Punkte A(5/-1/0), B(10/-2/3), C(12/-4/-1) und D(7/-3/-4).
Untersuchen Sie, ob das Viereck ABCD ein Rechteck ist.

11.0 Durch die Punkte A(1/0/0), B(1/1/0) und C(1/1/1) ist ein Parallelogramm festgelegt.

11.1 Berechnen Sie den vierten Eckpunkt D.

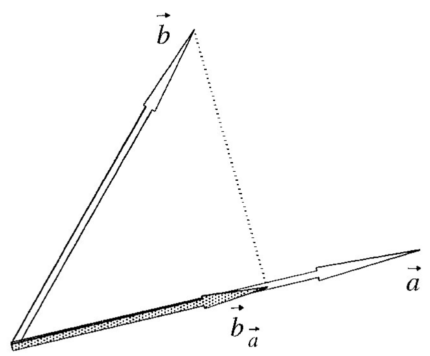
11.2 Berechnen Sie die Längen der Seiten.

11.3 Berechnen Sie den Diagonalenschnittpunkt.

11.4 Berechnen Sie die Länge der Diagonalen.

12.* Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}-1\\2\\2\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}5\\0\\-1\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie die orthogonale Projektion $\vec{b}_{\vec{a}}$ von $\vec{b}$ auf $\vec{a}$.



13. Bestimmen Sie $k \in \mathbb{R}$ so, dass der zugehörige Punkt C_k(k/-k/-2-k) von den Punkten A(1/0/-2) und B(-1/2/2) gleich weit entfernt ist. (Abitur 2010 BII)

Lösungen

1.1 $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$; $\quad -\vec{a}^{\,0} = -\frac{1}{\sqrt{50}}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$;

1.2 $-5\vec{a}^{\,0} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}3\\-4\\5\end{pmatrix}$;

2. $b_1 = 3$ und $b_1 = 9$

3. Ein Punkt der x_1-Achse ist allgemein gegeben durch $B(b_1/0)$.
   Bestimme allgemein die Länge der Strecke $\overline{AB}$ und bestimme dann b_1 so, dass die Streckenlänge 5 LE ergibt $\Rightarrow$ $B_1(-2/0)$ und $B_2(6/0)$;

4. Punkte der x_1-Achse: $\overline{AC} = \overline{BC}$ mit $C(c_1/0)$ $\Rightarrow$ $C(3/0)$
   Punkte der x_2-Achse: $\overline{AD} = \overline{BD}$ mit $D(0/d_2)$ $\Rightarrow$ $D(0/1)$

5. Berechne die Streckenlängen $\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CA}$ $\Rightarrow$ U = 20 LE

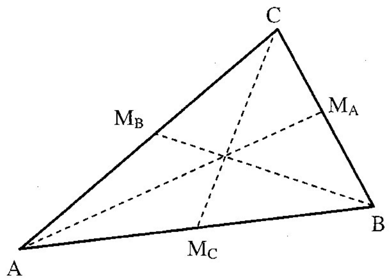
6.1 $\alpha \approx 53{,}1^0, \beta \approx 50{,}9^0, \gamma \approx 76{,}0^0$

6.2 $\alpha \approx 30{,}9^0, \beta \approx 35{,}3^0, \gamma \approx 113{,}8^0$

7. Nein, da das Skalarprodukt der beiden Vektoren –35 ergibt, also nicht Null.

8. $\angle ACB = 90^0$

9.



$$\vec{m}_c = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_b = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad \vec{m}_a = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM_a} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BM_b} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -9 \\ -5 \\ 18 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CM_c} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 15 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$$|\overrightarrow{AM_a}| = 7, \quad |\overrightarrow{BM_b}| = \frac{1}{2}\sqrt{430}, \quad |\overrightarrow{CM_c}| = \frac{1}{2}\sqrt{262}$$

10.

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{CD} = \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{DA} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Es gilt : $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DA} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$

$\Rightarrow$ es liegt ein Rechteck vor

11.

11.1 $\vec{d} = \vec{a} + \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D(1/0/1)$

11.2 $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 = \left|\overrightarrow{CD}\right|$

$\left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} = 1 = \left|\overrightarrow{AD}\right|$

11.3 $\vec{s} = \frac{1}{2} \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow S(1/\frac{1}{2}/\frac{1}{2})$

11.4 $\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{2} = \left|\overrightarrow{BD}\right|$

12.

$\left|\vec{b}_{\vec{a}}\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\varphi$

Winkel zwischen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$:

$$\cos\varphi = \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-7}{3 \cdot \sqrt{26}}$$

$$\Rightarrow \left|\vec{b}_{\vec{a}}\right| = \left|\vec{b}\right| \cdot \frac{-7}{3 \cdot \sqrt{26}} = \sqrt{26} \cdot \frac{-7}{3 \cdot \sqrt{26}} = -\frac{7}{3}$$

$$\Rightarrow \vec{b}_{\vec{a}} = -\frac{7}{3} \cdot \vec{a}^{\,0} = -\frac{7}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = -\frac{7}{9} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

13.

$$\left|\overrightarrow{AC_k}\right| = \left|\overrightarrow{BC_k}\right| \quad \Rightarrow \left|\begin{pmatrix} k-1 \\ -k \\ -k \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} k+1 \\ -k-2 \\ -k-4 \end{pmatrix}\right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{(k-1)^2+(-k)^2+(-k)^2} = \sqrt{(k+1)^2+(-k-2)^2+(-k-4)^2}$$

$$\Rightarrow \sqrt{k^2-2k+1+k^2+k^2} = \sqrt{k^2+2k+1+k^2+4k+4+k^2+8k+16}$$

$$\Rightarrow \sqrt{3k^2-2k+1} = \sqrt{3k^2+14k+21} \quad \Rightarrow 3k^2-2k+1 = 3k^2+14k+21 \ \Rightarrow k = -\frac{5}{4}$$