Aufgaben zum Vektorprodukt

1.0 Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte.

1.1 $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \\ -4 \end{pmatrix}$ 1.3 $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$

2.0 Gegeben sind die Punkte A(1/1/0), B(0/3/1), C(-2/4/4) und D(-1/2/3), die das Parallelogramm ABCD bilden.

2.1 Bestimmen Sie den Schnittpunkt der Diagonalen des Parallelogramms und den Schnittwinkel dieser Diagonalen.

2.2 Ermitteln Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Parallelogramms.

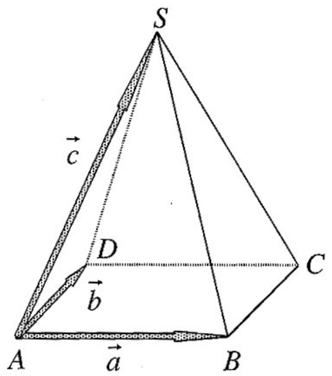
3. Berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts des Dreiecks ABC mit A(1/-1/7), B(1/5/11) und C(3/4/-5).

4. Die drei Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugen einen Spat.

   Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens sowie der Oberfläche dieses Spats.

5. Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens der dreiseitigen Pyramide ABCS mit A(1/-2/5), B(1/3/-5), C(0/11/7) und S(7/-3/5).

6. Berechnen Sie das Volumen einer vierseitigen Pyramide ABCDS mit A(2/-1/0), B(-1/0/2), C(3/1/-5), D(6/0/-7) und S(4/-3/7) mit Hilfe der folgenden Skizze.



7. Die Punkte 0, A(1/0/-2), B(-1/2/2) und C_k(k/-k/-2-k) bilden jeweils ein Tetraeder. Berechnen Sie alle Werte von k, für die das Volumen des zugehörigen Tetraeders 1 VE beträgt. (Abitur 2010 BII)

8.0 Auf einem Spielplatz wird über dem Sandkasten ein dreieckiges Sonnensegel angebracht. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die Punkte $A_1(0/0/0)$, $A_2(5/0/0)$, $A_3(5/5/0)$ und $A_4(0/5/0)$ die Ecken des Sandkastens beschreiben. Das Sonnensegel wird im Punkt A_3 fest an der Sandkastenecke und in den Punkten $B_k(4/0/k)$ und $C_k(0/4/k)$ jeweils an einer senkrechten Stütze befestigt. Dabei ist k ein reeller Parameter. Für die Einheiten auf den Koordinatenachsen gilt jeweils 1 LE = 1 m, bei den Berechnungen kann auf die Verwendung der Einheiten verzichtet werden. (Abitur 2012 BI)

8.1 Bestimmen Sie k so, dass das Sonnensegel die Form eines gleichseitigen Dreiecks hat.

Setzen Sie für die folgenden Aufgaben k = 2,5.

8.2 Stellen Sie den Sandkasten und das Sonnensegel in einer Skizze im kartesischen Koordinatensystem dar.

8.3 Berechnen Sie den Flächeninhalt des Sonnensegels.

9.0 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung O sind die Punkte $A(1/3/-2)$, $B_k(k/0/1)$ mit $k \in \mathbb{R}$ und $C(-1/6/0)$ gegeben. (Abitur 2014 BII)

9.1 Bestimmen Sie den Wert für k so, dass die Vektoren $\overrightarrow{AB_k}$ und $\overrightarrow{AC}$ orthogonal zueinander sind.

9.2 Berechnen Sie den Wert des Parameters k so, dass der Flächeninhalt F(k) des Dreiecks AB_kC minimal wird. Hinweis: Es genügt den Term unter der Wurzel zu betrachten.
(Mögliches Teilergebnis: $F(k) = \frac{1}{2}\sqrt{13k^2 - 38k + 322}$)

Lösungen

1.1 $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ 1.2 $\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\6\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ 1.3 $\begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7\\4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\12\end{pmatrix}$

2.1

$$\vec{s}=\frac{1}{2}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-1\\5\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0,5\\2,5\\2\end{pmatrix}\Rightarrow S(-0,5/2,5/2)$$

Schnittwinkel der Diagonalen:

$$\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\3\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\begin{pmatrix}-3\\3\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\-1\\2\end{pmatrix}=3-3+8=8$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{9+9+16}=\sqrt{34}\qquad \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{1+1+4}=\sqrt{6}$$

$$\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{34}\cdot\sqrt{6}}\approx 0,56011\quad\Rightarrow\varphi\approx 55,94°$$

2.2

$$A_{\text{Parallelogramm}}=\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$

$$\vec{a}\times\vec{b}=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\left|\vec{a}\times\vec{b}=\left|\begin{pmatrix}5\\1\\3\end{pmatrix}\right|\right|=\sqrt{25+1+9}=\sqrt{35}$$

3.

$$A_{\text{Dreieck}}=\frac{1}{2}\cdot\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|$$

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\6\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\5\\-12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-92\\8\\-12\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{8464+64+144}=\sqrt{8672}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{8672}\approx 46,56\text{FE}$$

4.

$$A_{Spat} = \left|\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\circ\vec{c}\right|$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} \quad \Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = 6$$

$$\Rightarrow V_{Spat} = |6| = 6\text{VE}$$

Oberfläche des Spats: $2\cdot(|\vec{a}\times\vec{b}|+|\vec{a}\times\vec{c}|+|\vec{b}\times\vec{c}|)$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\0\\6\end{pmatrix} \quad \vec{a}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}0\\-2\\2\end{pmatrix} \quad \vec{b}\times\vec{c} = \begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$$

$$|\vec{a}\times\vec{b}| = 6 \quad |\vec{a}\times\vec{c}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2} \quad |\vec{b}\times\vec{c}| = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow O = 2\cdot(6+2\sqrt{2}+3\sqrt{2}) = 12+10\sqrt{2} \approx 26{,}14\text{FE}$$

5.

$$V = \frac{1}{6}\cdot|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}| \quad \vec{a} = \overline{AB} = \begin{pmatrix}0\\5\\-10\end{pmatrix} \quad \vec{b} = \overline{AC} = \begin{pmatrix}-1\\13\\2\end{pmatrix} \quad \vec{c} = \overline{AS} = \begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{pmatrix}0\\5\\-10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\13\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}140\\10\\5\end{pmatrix} \quad \Rightarrow |\vec{a}\times\vec{b}|\circ\vec{c} = \begin{pmatrix}140\\10\\5\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}6\\-1\\0\end{pmatrix} = 840-10 = 830$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6}\cdot 830 = 138\frac{1}{3}\text{VE}$$

6.

$$V_{\text{Vierseitige Pyramide}} = \frac{1}{3}\cdot|(\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c}|$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \overline{AB}\times\overline{AD} = \begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\1\\-7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-9\\-13\\-7\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\vec{a}\times\vec{b})\circ\vec{c} = \begin{pmatrix}-9\\-13\\-7\end{pmatrix}\circ\overline{AS} = \begin{pmatrix}-9\\-13\\-7\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}2\\-2\\7\end{pmatrix} = -18+26-49 = -41$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3}\cdot 41 = 13\frac{2}{3}\text{VE}$$

7.

$$V_{Tetraeder} = \frac{1}{6} \cdot \left| (\overrightarrow{0A} \times \overrightarrow{0B}) \circ \overrightarrow{0C_k} \right|$$

$$\overrightarrow{0A} \times \overrightarrow{0B} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\overrightarrow{0A} \times \overrightarrow{0B}) \circ \overrightarrow{0C_k} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix} = 4k - 4 - 2k = 2k - 4$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{6} \cdot |2k-4| = 1VE \quad \Rightarrow |2k-4| = 6$$

$1)\, 2k - 4 = 6 \quad \Rightarrow k = 5$

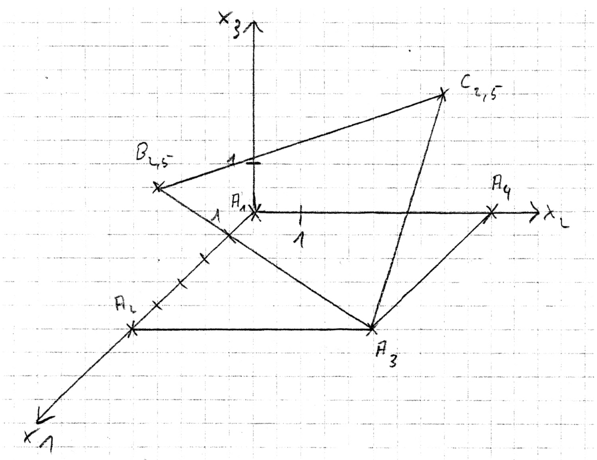
$2)\, 2k - 4 = -6 \quad \Rightarrow k = -1$

8.1

$$\overline{A_3B_k} = \overline{A_3C_k} = \overline{B_kC_k} \quad \Rightarrow \left| \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ k \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -5 \\ -1 \\ k \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right|$$

$$\Rightarrow \sqrt{26 + k^2} = \sqrt{32} \quad \Rightarrow k^2 = 6 \;\Rightarrow (k_1 = -\sqrt{6}) \quad k_2 = \sqrt{6}$$

8.2



8.3

$$A=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{A_3B_{2,5}}\times\overrightarrow{A_3C_{2,5}}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-1\\-5\\2,5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-5\\-1\\2,5\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{pmatrix}-10\\-10\\-24\end{pmatrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{100+100+576}=\sqrt{194}$$

Der Flächeninhalt des Sonnensegels beträgt $\sqrt{194}\approx 13,93\,m^2$.

9.1

$$\overrightarrow{AB_k}=\begin{pmatrix}k-1\\-3\\3\end{pmatrix}\quad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}k-1\\-3\\3\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}-2\\3\\2\end{pmatrix}=0\ \Rightarrow -2k+2-9+6=0\ \Rightarrow k=-\frac{1}{2}$$

9.2

$$\overrightarrow{AB_k}\times\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-15\\-2k-4\\3k-9\end{pmatrix}$$

$$F(k)=\frac{1}{2}\cdot\left|\overrightarrow{AB_k}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-15)^2+(-2k-4)^2+(3k-9)^2}=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{225+4k^2+16k+16+9k^2-54k+81}=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{13k^2-38k+322}$$

Die Fläche ist minimal, wenn $13k^2-38k+322$ minimal wird;

Absolutes Minimum beim Scheitel, da nach oben geöffnete Parabel;

$$\Rightarrow k_{min}=-\frac{-38}{2\cdot 13}=\frac{19}{13}$$