Aufgaben zur Lageuntersuchung dreier Ebenen

1 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebenen
E: $x_1 + 4x_2 + x_3 - 12 = 0$, F: $x_2 + x_3 - 11 = 0$ sowie G_m: $3x_2 + (m - 1)x_3 + m - 37 = 0$ mit $m \in \mathbb{R}$ gegeben.
Untersuchen Sie in Abhängigkeit von m die Lagebeziehung der Ebenen E, F und G_m. (Abitur 2006 BII)

2 In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebenen
E: $x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3$, F: $-2x_2 + x_3 = -1$ sowie G: $4x_2 + x_3 = 11$ gegeben.
Weisen Sie nach, dass sich die drei Ebenen in genau einem Punkt schneiden und bestimmen Sie die Koordinaten dieses Punktes. Schließen Sie unter anderem daraus auf die gegenseitige Lage der Ebenen F und G und ermitteln Sie, falls möglich, die Koordinaten dreier gemeinsamer Punkte von F und G.
(Abitur 2007 BI)

Lösungen

1

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & m-1 & 37-m \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array} \right)$$

$m-4=0 \Rightarrow m=4 \Rightarrow (III)\, 0\ \ 0\ \ 0 | 0$

$\Rightarrow$ für m = 4 hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ die drei Ebenen E, F und G_4 schneiden sich in einer Geraden

$\Rightarrow$ für m $\neq$ 4 hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung

$\Rightarrow$ die drei Ebenen E, F und G_m schneiden sich in einem Punkt S(-35;12;-1)

2

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & 11 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -6 & -18 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ das lineare Gleichungssystem hat genau eine Lösung

$\Rightarrow$ die drei Ebenen E, F und G schneiden sich in einem Punkt

$(III) \Rightarrow -6x_3 = -18 \quad \Rightarrow x_3 = 3$

$(II) \Rightarrow -2x_2 + x_3 = -1 \quad \Rightarrow -2x_2 + 3 = -1 \quad \Rightarrow x_2 = 2$

$(I) \Rightarrow x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 3 \quad \Rightarrow x_1 + 8 - 6 = 3 \quad \Rightarrow x_1 = 1$

$\Rightarrow S(1/2/3)$

Die Geraden F und G schneiden sich in einer Geraden, weil sich die Ebenen E, F und G in einem Punkt schneiden und damit F und G weder parallel noch identisch sein.

Schnittgerade zwischen F und G bestimmen:

$(I) \quad -2x_2 + x_3 = -1 \quad \Rightarrow x_3 = -1 + 2x_2$

$(II) \quad 4x_2 + x_3 = 11$

x_3 in (II): $4x_2 - 1 + 2x_2 = 11 \quad \Rightarrow x_2 = 2$

$\Rightarrow x_3 = -1 + 4 = 3$

$\Rightarrow x_1 = t$ beliebig

$\Rightarrow s : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (Parallele zur x_1-Achse)

$\Rightarrow P_1(0/2/3), P_2(1/2/3), P_3(2/2/3)$