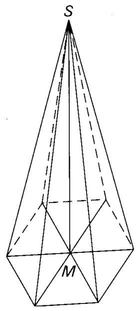
Jochen Weber

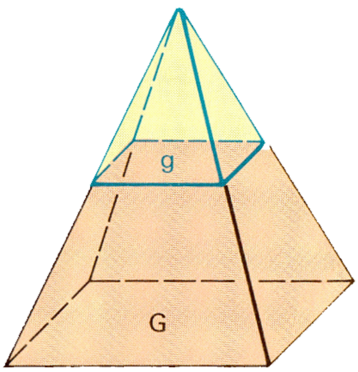
Aufgaben zur Pyramide

1 Eine Pyramide hat als Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge 3 cm.
Die Seitenkanten der Pyramide sind 6 cm lang.
Berechnen Sie das Volumen und die Oberfläche der Pyramide.



2 Berechnen Sie das Volumen eines regulären Tetraeders in Abhängigkeit von der Kantenlänge a.
Bestimmen Sie, welches Volumen sich für a = $\sqrt{3}$ ergibt.

3 Ein Pyramidenstumpf (siehe folgende Figur) hat die Höhe h = 4,0 cm und quadratische Grund- und Deckfläche mit den Inhalten G = 64 cm^2 und g = 25 cm^2.
Berechnen Sie das Volumen des Pyramidenstumpfes.



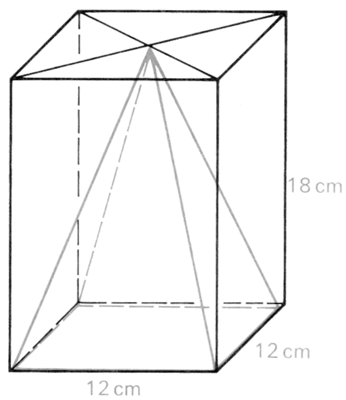
Jochen Weber

4.0 Aus einem Quader mit quadratischer Grundfläche wird die größtmögliche gerade Pyramide gefertigt (Maßangabe siehe folgende Figur).

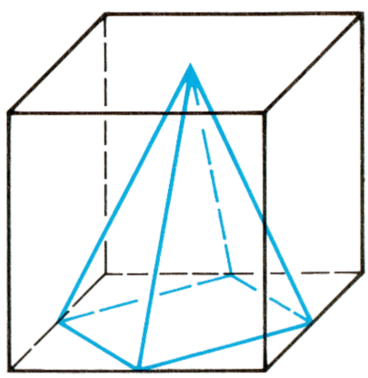
4.1 Berechnen Sie das Volumen des „Abfalls“.

4.2 Bestimmen Sie, in welchem Verhältnis das Pyramidenvolumen zu dem Volumen des Abfalls steht.

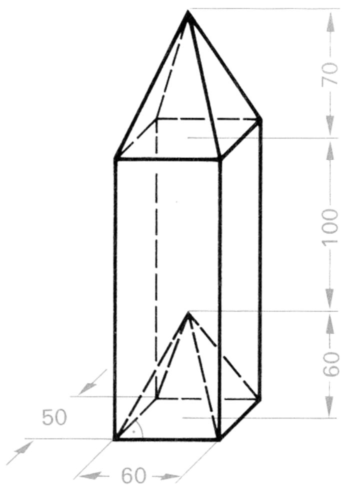
4.3 Berechnen Sie die Oberfläche der Pyramide.



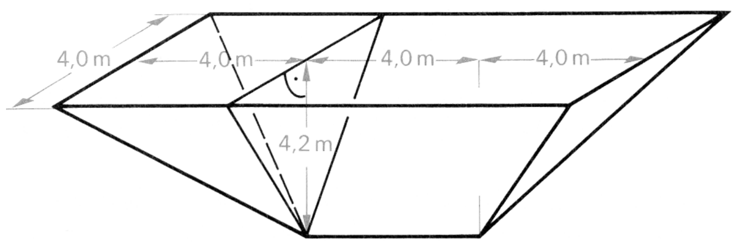
5 Die Kante eines Würfels ist 6 cm lang. Diesem Würfel ist eine Pyramide so einbeschrieben, dass ihre Spitze mit dem Mittelpunkt der oberen Würfelfläche zusammenfällt. Die Mittelpunkte der Würfelgrundkanten sind Ecken der Pyramidengrundfläche (siehe Figur).
Berechnen Sie Volumen und Oberfläche der Pyramide.



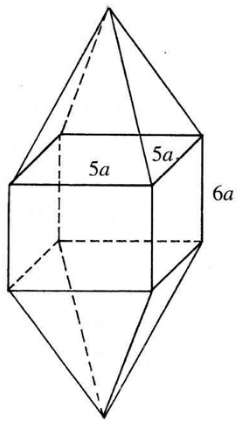
6 Ein Werkstück hat das in folgender Figur angegebene Aussehen.
Berechnen Sie sein Volumen.



7 Ein Trog hat die in folgender Figur angegebene Form mit den eingetragenen Maßen.
Berechnen Sie, wie viel Wasser der Trog fasst.



8.0 Wir betrachten einen zusammengesetzten Körper wie abgebildet.



8.1 Bestimmen Sie, wie hoch der Gesamtkörper (in Abhängigkeit von a) ist, wenn das Volumen des prismenförmigen Teils genauso groß ist wie die Summe der Volumina der beiden gleich großen Pyramiden.

8.2 Berechnen Sie die Oberfläche des Gesamtkörpers in Abhängigkeit von a.

8.3 Ermitteln Sie, welche Grundkante (in Abhängigkeit von a) ein Würfel haben muss, der dieselbe Oberfläche wie der Gesamtkörper besitzt.

9.0 Ein Zelt soll die Form einer quadratischen Pyramide mit der Grundkantenlänge a = 2,2 m und der Höhe h = 2,5 m erhalten.

9.1 Berechnen Sie, wie viel Quadratmeter Zeltstoff man zur Herstellung (ohne Boden) benötigt, wenn man mit 12,5 % Verschnitt rechnen muss.

9.2 Ermitteln Sie, wie viel Meter Gestänge man benötigt, wenn diese entlang der Seitenkanten verlaufen soll.

Lösungen

1

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

Grundfläche der Pyramide: $G = 6 \cdot A_{Dreieck}$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h \qquad h^2 + 1{,}5^2 = 3^2 \;\Rightarrow h^2 = 6{,}75 \;\Rightarrow h = 2{,}60\,cm$$

$$\Rightarrow A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 2{,}60 = 3{,}90\,cm^2 \;\Rightarrow G = 6 \cdot 3{,}90 = 23{,}4\,cm^2$$

Höhe der Pyramide: $(\text{Seitenkante})^2 = (\text{Grundkante})^2 + (\text{Höhe Pyramide})^2$

$$\Rightarrow h^2 = 6^2 - 3^2 = 27\,cm \Rightarrow h = 5{,}20\,cm$$

$$\Rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 23{,}40 \cdot 5{,}20 = 40{,}56\,cm^3$$

Oberfläche der Pyramide: O=Grundfläche+Mantelfläche

Mantelfläche: $M = 6 \cdot A_{Seitendreieck}$

$$A_{Seitendreieck} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot h \qquad h^2 + 1{,}5^2 = 6^2 \;\Rightarrow h^2 = 33{,}75 \Rightarrow h = 5{,}81\,cm$$

$$\Rightarrow A_{Seitendreieck} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 5{,}81 = 8{,}71\,cm^2 \;\Rightarrow M = 6 \cdot 8{,}71 = 52{,}26\,cm^2$$

$$\Rightarrow O = 23{,}4 + 52{,}26 = 75{,}66\,cm^2$$

2

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \text{Grundfläche ist ein gleichseitiges Dreieck}$$

$$A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h \quad a^2 = \left(\frac{1}{2}a\right)^2 + h^2 \;\Rightarrow h^2 = \frac{3}{4}a^2 \;\Rightarrow h = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

$$\Rightarrow A_{Dreieck} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$\text{Höhe des Tetraeders: } a^2 = \left(\frac{2}{3} \cdot h_{Grunddreieck}\right)^2 + h_{Tetraeder}{}^2$$

$$\Rightarrow h_{Tetraeder}{}^2 = a^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2 \;\Rightarrow h = \sqrt{\frac{2}{3}}a$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}a = \frac{\sqrt{2}}{12}a^3$$

$$\text{Für } a=\sqrt{3} \text{ ergibt sich: } V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot (\sqrt{3})^3 = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot 3\sqrt{3} = \frac{\sqrt{6}}{4} \approx 0{,}61\,cm^3$$

3

$$V_{Stumpf} = V_{ganze\,Pyramide} - V_{abgeschnittene\,Pyramide}$$

$$V_{ganze\,Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot (h+x)$$

Berechnung von x: $\frac{G}{g} = \frac{(h+x)^2}{x^2} \Rightarrow \frac{\sqrt{G}}{\sqrt{g}} = \frac{(h+x)}{x} \Rightarrow x \cdot \sqrt{G} = (h+x) \cdot \sqrt{g}$

$$x \cdot \sqrt{G} = h \cdot \sqrt{g} + x \cdot \sqrt{g} \Rightarrow x \cdot (\sqrt{G} - \sqrt{g}) = h \cdot \sqrt{g} \Rightarrow x = \frac{h \cdot \sqrt{g}}{\sqrt{G} - \sqrt{g}}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\sqrt{25} \cdot 4}{\sqrt{64} - \sqrt{25}} = \frac{20}{3} = 6{,}67\,cm$$

$$\Rightarrow V_{ganze\,Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot (4+6{,}67) = \frac{1}{3} \cdot 64 \cdot 10{,}67 = 227{,}63\,cm^3$$

$$\Rightarrow V_{abgeschnittene\,Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot g \cdot x = \frac{1}{3} \cdot 25 \cdot 6{,}67 = 55{,}58\,cm^3$$

$$\Rightarrow V_{Stumpf} = 227{,}63 - 55{,}58 = 172{,}05\,cm^3$$

4.1

$$V_{Abfall} = V_{Quader} - V_{Pyramide}$$

$$V_{Quader} = 12 \cdot 12 \cdot 18 = 2592\,cm^3$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 12 \cdot 12 \cdot 18 = 864\,cm^3$$

$$\Rightarrow V_{Abfall} = 2592 - 864 = 1728\,cm^3$$

4.2 $\frac{V_{Pyramide}}{V_{Abfall}} = \frac{864}{1728} = \frac{1}{2}$

4.3

$$O_{Pyramide} = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche}$$

Mantelfläche: vier gleichschenklige Dreiecke

$$A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot h_{Seitendreieck} \qquad (h_{Seitendreieck})^2 = (h_{Pyramide})^2 + 6^2 \Rightarrow (h_{Seitendreieck})^2 = 18^2 + 6^2 = 360$$

$$\Rightarrow h_{Seitendreieck} = 18{,}97\,cm$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 18{,}97 = 113{,}82\,cm^2 \quad \Rightarrow \text{Mantelfläche} = 4 \cdot 113{,}82 = 455{,}28\,cm^2$$

$$\Rightarrow O = 144 + 455{,}28 = 599{,}28\,cm^2$$

5

$$\text{Grundkante: } 3^2+3^2=(\text{Grundkante})^2 \Rightarrow \text{Grundkante}=\sqrt{18}=4{,}24\,\text{cm}$$

$$V_{\text{Pyramide}}=\frac{1}{3}\cdot 4{,}24\cdot 4{,}24\cdot 6=35{,}96\,\text{cm}^3$$

$$\text{Oberfläche: } O=\text{Grundfläche}+\text{Mantelfläche}$$

$$\text{Mantelfläche}=4\cdot A_{\text{Seitendreieck}}$$

$$A_{\text{Seitendreieck}}=\frac{1}{2}\cdot g\cdot h_{\text{Seitendreieck}}$$

$$(h_{\text{Seitendreieck}})^2=(h_{\text{Pyramide}})^2+(\frac{1}{2}\cdot 4{,}24)^2=36+4{,}49=40{,}49$$

$$\Rightarrow h_{\text{Seitendreieck}}=6{,}36\,\text{cm} \quad \Rightarrow A_{\text{Seitendreieck}}=\frac{1}{2}\cdot 4{,}24\cdot 6{,}36=13{,}48\,\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \text{Mantelfläche}=4\cdot 13{,}48=53{,}92\,\text{cm}^2$$

$$\Rightarrow \text{Oberfläche}=(4{,}24)^2+53{,}92=71{,}90\,\text{cm}^2$$

6

$$V_{\text{Werkstück}}=V_{\text{Quader}}+V_{\text{Pyramide 1}}-V_{\text{Pyramide 2}}$$

$$V_{\text{Quader}}=50\cdot 60\cdot 160=480000$$

$$V_{\text{Pyramide 1}}=\frac{1}{3}\cdot 50\cdot 60\cdot 70=70000$$

$$V_{\text{Pyramide 2}}=\frac{1}{3}\cdot 50\cdot 60\cdot 60=60000$$

$$\Rightarrow V_{\text{Werkstück}}=480000+70000-60000=490000$$

7

Trog setzt sich zusammen aus einem Prisma und zwei Teilpyramiden, die sich zu einer Pyramide zusammen setzen lassen.

$$V_{\text{Prisma}}=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4{,}2\cdot 4=33{,}6\,\text{m}^3$$

$$V_{\text{Pyramide}}=\frac{1}{3}\cdot 8\cdot 4\cdot 4{,}2=44{,}8\,\text{m}^3$$

$$V_{\text{Trog}}=33{,}6+44{,}8=78{,}4\,\text{m}^3=78400\,\text{dm}^3=78400\,\text{l}$$

8.1

$$V_{\text{Prisma}}=5a\cdot 5a\cdot 6a=150a^3$$

$$V_{\text{Pyramide}}=\frac{1}{3}\cdot 5a\cdot 5a\cdot h=\frac{25}{3}a^2\cdot h$$

$$\Rightarrow 150a^3=2\cdot\frac{25}{3}a^2\cdot h \quad \Rightarrow h=9a$$

$$\Rightarrow \text{Gesamthöhe: } 9a+6a+9a=24a$$

8.2

$$O_{\text{Gesamtkörper}} = 8 \cdot A_{\text{Dreieck Pyramide}} + 4 \cdot A_{\text{Seitenfläche Prisma}}$$

$$A_{\text{Dreieck Pyramide}} = \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot h_{\text{Dreieck}} \qquad h_{\text{Dreieck}}{}^2 = (2{,}5a)^2 + (9a)^2 = 87{,}25a^2 \quad \Rightarrow h_{\text{Dreieck}} \approx 9{,}34a$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck Pyramide}} = \frac{1}{2} \cdot 5a \cdot 9{,}34a \approx 23{,}35a^2$$

$$\Rightarrow A_{\text{Seitenfläche Prisma}} = 5a \cdot 6a = 30a^2$$

$$\Rightarrow O_{\text{Gesamtkörper}} = 8 \cdot 23{,}35a^2 + 4 \cdot 30a^2 = 306{,}8a^2$$

8.3 $O_{\text{Würfel}} = 6 \cdot b^2 \quad \Rightarrow 6b^2 = 306{,}8a^2 \quad \Rightarrow b \approx 7{,}15a$

9.1

$$A = 4 \cdot A_{\text{Dreieck}}$$

$$A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}2 \cdot h_{\text{Dreieck}} \qquad (h_{\text{Dreieck}})^2 = (1{,}1)^2 + (2{,}5)^2 = 7{,}46 \quad \Rightarrow h_{\text{Dreieck}} \approx 2{,}73\,\text{m}$$

$$\Rightarrow A_{\text{Dreieck}} = \frac{1}{2} \cdot 2{,}2 \cdot 2{,}73 = 3{,}003\,\text{m}^2 \qquad \Rightarrow A = 4 \cdot 3{,}003 = 12{,}01\,\text{m}^2$$

$\Rightarrow$ Es wird insgesamt $12{,}01 \cdot 1{,}125 = 13{,}51\,\text{m}^2$ Zeltstoff benötigt.

9.2

Länge einer Seitenkante:

$$s^2 = (h_{\text{Dreieck}})^2 + (1{,}1)^2 = (2{,}73)^2 + (1{,}1)^2 = 8{,}66 \quad \Rightarrow s \approx 2{,}94\,\text{m}$$

Gesamtlänge: $4 \cdot 2{,}94 = 11{,}76\,\text{m}$