Aufgaben zur Vektorrechnung

1.0 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\5\\-1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}2\\-2\\2\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie folgende Vektoren.

1.1 $\vec{a}+\vec{b}$ 1.2 $2\vec{a}-3\vec{b}$ 1.3 $\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)$

2.0 Berechnen Sie den Vektor $\vec{a}$ aus folgenden Vektorgleichungen.

2.1 $3\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\2\end{pmatrix}-4\cdot\vec{a}=\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ 2.2 $2\cdot\left(\vec{a}-\begin{pmatrix}4\\-2\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}2\\-5\\7\end{pmatrix}+5\cdot\vec{a}$

2.3 $2\cdot\vec{a}-3\cdot\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}=\vec{a}+\begin{pmatrix}-14\\-1\\-3\end{pmatrix}$

3 Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},\vec{b}=\begin{pmatrix}-3\\0\end{pmatrix},\vec{c}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix},\vec{d}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$.

Berechnen Sie x so, dass die Vektoren $3\vec{a}-\frac{1}{3}\vec{b}+2\vec{c}-3\vec{d}$ und $\begin{pmatrix}x\\-5\end{pmatrix}$ parallel sind.

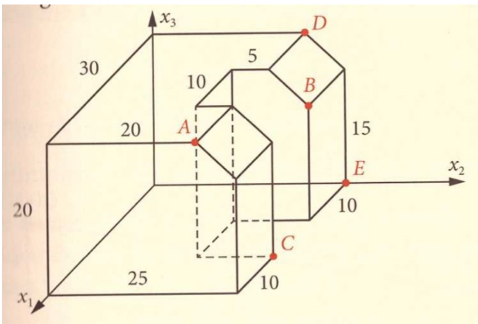
4 Berechnen Sie c_2 so, dass die Punkte A(-3/-4), B(4/2) und C(0;c_2) auf einer Geraden liegen.

5.0 Gegeben ist ein Viereck ABCD. Beweisen Sie, dass es ein Parallelogramm ist.

5.1 A(-1/-4), B(0/4), C(9/3) und D(8/-5)

5.2 A(2/0/0), B(1/-3/6), C(2/1/7) und D(3/4/1)

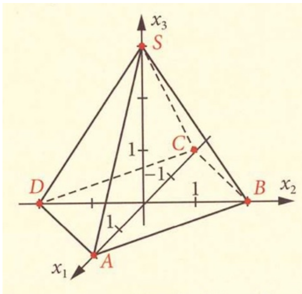
6.0 Gegeben ist die Skizze eines Gebäudes.



6.1 Berechnen Sie die Koordinaten der angegebenen Punkte C, D und E.

6.2 Berechnen Sie die Längen der Strecken $\overline{AB}, \overline{CE}$ und $\overline{AD}$.

7.0 Theo möchte die Skizze einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche vergrößern.



7.1 Bestimmen Sie die Koordinaten der fünf Eckpunkte und Berechnen Sie alle Kantenlängen.

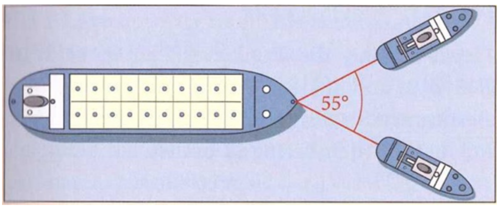
7.2 Vergrößern Sie die Pyramide im Verhältnis 2:1 und geben Sie die Koordinaten der neuen Eckpunkte an.

8.0 Bestimmen Sie die Länge der folgenden Vektoren.

8.1 $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ 8.2 $\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ 8.3 $\vec{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix}$

9 Berechnen Sie, wie a gewählt werden muss, damit A(2/1/2) und B(3/a/10) den Abstand 9 besitzen.

10 Ein Schiff wird von zwei Schleppern jeweils mit einer Kraft von 12kN in Seilrichtung gezogen. Die beiden Seile der Schlepper bilden einen Winkel von 55°.
Bestimmen Sie zeichnerisch die resultierende Kraft.



11.0 Ein Flugzeug wird durch eine Schubkraft von 5,8 kN in konstanter Flughöhe geradlinig angetrieben. Der Wind übt dabei eine gleichbleibende Kraft von 4 kN in einem Winkel von 60° zur Flugrichtung aus.

11.1 Zeichnen Sie die Kräfte maßstabsgetreu in ein Koordinatensystem und legen Sie dazu das Flugzeug in den Koordinatenursprung.

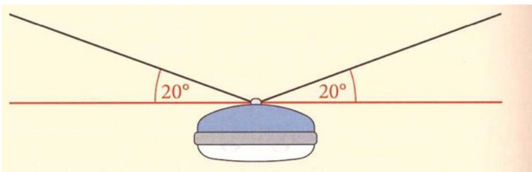
11.2 Bestimmen Sie grafisch die Kraft, die insgesamt auf das Flugzeug wirkt und lesen Sie deren Größe und die Richtung zur Schubkraft ab.

11.3 Geben Sie einen Vektor für die Schubkraft und für die Windkraft an.

11.4 Berechnen Sie einen Vektor für die auf das Flugzeug wirkende Kraft sowie deren Größe.

11.5 Ermitteln Sie, unter welchem Winkel zur gewünschten Flugroute Kurs gehalten werden muss, damit das Flugzeug zum Zielort kommt.

12.0 Eine Straßenlampe $\left(\left|\vec{G}\right| = 300\,\mathrm{N}\right)$ ist an zwei Stellen befestigt (siehe Skizze).



12.1 Bestimmen Sie den Betrag und die Haltekraft in einem der Seile.

12.2 Untersuchen Sie, welchen Einfluss eine Verlängerung der Seile auf die Haltekraft hat, wenn man die Aufhängepunkte nicht verändert.

Jochen Weber

Lösungen

1.1 $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\5\\-3\end{pmatrix}$ 1.2 $2\vec{a}-3\vec{b}=\begin{pmatrix}11\\-15\\-1\end{pmatrix}$ 1.3 $\frac{1}{2}\vec{a}+\left(\vec{b}-2\vec{c}\right)=\begin{pmatrix}-6{,}5\\9\\-6\end{pmatrix}$

2.1 $\vec{a}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-9\\1\\7\end{pmatrix}$ 2.2 $\vec{a}=\begin{pmatrix}-\frac{10}{3}\\3\\-\frac{7}{3}\end{pmatrix}$ 2.3 $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}$

3 $x = 0$

4 $\vec{AB}=\begin{pmatrix}7\\6\end{pmatrix}$, $\vec{AC}=\begin{pmatrix}3\\c_2+4\end{pmatrix}$

Bedingung: $\vec{AC}=\lambda\cdot\vec{AB}$

$\Rightarrow 3=\lambda\cdot 7\Rightarrow \lambda=\frac{3}{7}$

$\Rightarrow c_2+4=\lambda\cdot 6\Rightarrow c_2+4=\frac{18}{7}\Rightarrow c_2=-\frac{10}{7}$

5.1 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}9\\-1\end{pmatrix}$

5.2 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\begin{pmatrix}-1\\-3\\6\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}$

6.1 $C(20/25/0), D(0/20/20), E(0/25/0)$

6.2

$A(30/20/20), B(10/25/15)$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -20 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{400+25+25} = \sqrt{450}$$

$$\overline{CE} = \left|\overrightarrow{CE}\right| = \left|\begin{pmatrix} -20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{400} = 20$$

$$\overline{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{900} = 30$$

7.1

$A(2/0/0), B(0/2/0), C(-2/0/0), D(0/-2/0), S(0/0/2)$

$$\overline{AB} = \left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \overline{DC}$$

$$\overline{AD} = \left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \overline{BC}$$

$$\overline{AS} = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8} = \overline{BS} = \overline{CS} = \overline{DS}$$

7.2 $A(4/0/0), B(0/4/0), C(-4/0/0), D(0/-4/0), S(0/0/4)$

8.1 $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{25+16+36} = \sqrt{77}$

8.2 $\left|\vec{b}\right| = \sqrt{4+16+25} = \sqrt{45}$

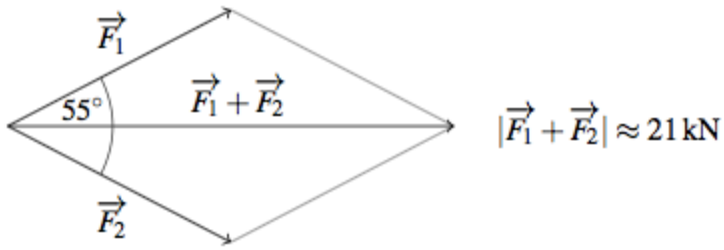
8.3 $\left|\vec{c}\right| = \sqrt{1+25+9} = \sqrt{35}$

9

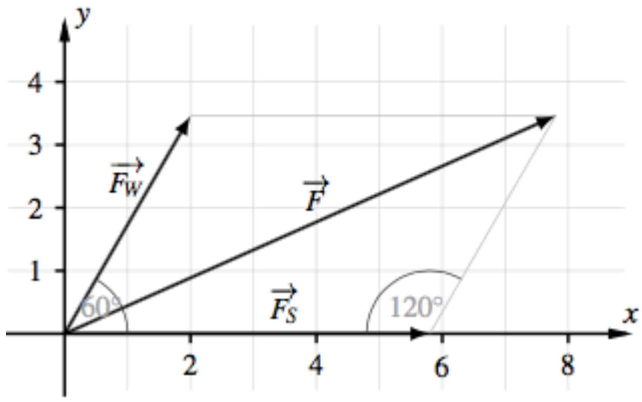
$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ a-1 \\ 8 \end{pmatrix} \quad \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{1+(a-1)^2+64} = \sqrt{a^2-2a+66}$$

$$\Rightarrow \sqrt{a^2-2a+66} = 9 \quad \Rightarrow a^2-2a-15=0 \quad \Rightarrow a_1 = -3 \quad a_2 = 5$$

10



11.1



11.2 Die Kräfte wirken in einem Winkel von etwa 25 ° und die Größe der resultierenden Kraft beträgt etwa 8,5 kN (aus der Zeichnung gemessen).

11.3

$$\vec{F_s} = \begin{pmatrix} 5{,}8 \\ 0 \end{pmatrix}$$

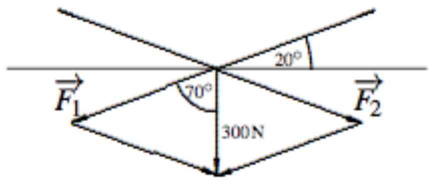
$$\vec{F_w} = \begin{pmatrix} 4\cdot\cos(60°) \\ 4\cdot\sin(60°) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix}$$

11.4

$$\vec{F} = \vec{F_s} + \vec{F_w} = \begin{pmatrix} 7{,}8 \\ \sqrt{12} \end{pmatrix} \qquad \left|\vec{F}\right| = \sqrt{(7{,}8)^2 + \left(\sqrt{12}\right)^2} \approx 8{,}5346$$

11.5 $\sin\alpha = \dfrac{\left|\vec{F_w}\right|\cdot\sin(120°)}{\left|\vec{F}\right|} = \dfrac{4\cdot\sin(120°)}{8{,}5346} \approx 0{,}4059 \quad \Rightarrow \alpha \approx 23{,}95°$

12.1



$$|\overrightarrow{F_1}| = |\overrightarrow{F_2}| = \frac{150}{\cos(70°)} \approx 438,57$$

12.2 Wenn die Seile verlängert werden, dann wird der Winkel größer als 20°, die Basiswinkel der gleichschenkligen Dreiecke im Kräfteparallelogramm warden damit kleiner und damit auch die Schenkellängen, die den Spannkräften entsprechen.