

Basis und Dimension eines Vektorraumes

Definition:

Jede Menge linear unabhängiger Vektoren, aus denen sich jeder Vektor des Raumes \mathbb{R}^3 bzw. der Ebene \mathbb{R}^2 erzeugen lässt, bildet eine Basis des \mathbb{R}^3 bzw. des \mathbb{R}^2 .

Folgerung:

Drei bzw. zwei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^3 bzw. des \mathbb{R}^2 . Jeder weitere Vektor lässt sich dann als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

Die Anzahl der Vektoren einer Basis heißt Dimension.

Folgerung:

Die Ebene \mathbb{R}^2 ist zweidimensional, der Anschauungsraum \mathbb{R}^3 ist dreidimensional.

Aufgaben:

1) Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

2) Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

3) Bestimmen Sie den Wert von $k \in \mathbb{R}$ so, dass die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix}$ eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

4) In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 mit dem Ursprung 0 sind die Punkte $A(1/0/-2)$, $B(-1/2/2)$ und $C_k(k/-k/-2-k)$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben. (Abitur 2010 BII)
Untersuchen Sie, für welche Werte von k die drei Vektoren \vec{OA} , \vec{OB} und \vec{OC}_k eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

5.0 Im \mathbb{R}^3 sind die folgenden Vektoren gegeben:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \vec{c}_p = \begin{pmatrix} p+4 \\ 2p \\ 3-4p \end{pmatrix} \text{ mit } p \in \mathbb{R} \text{ und } \vec{d} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}. \text{ (Abitur 2017 BI)}$$

5.1 Bestimmen Sie den Wert des Parameters p , für den die Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}_p eine Basis des \mathbb{R}^3 bilden.

5.2 Drücken Sie den Vektor \vec{d} durch eine Linearkombination der Vektoren \vec{a}, \vec{b} und \vec{c}_{-2} (d.h. für $p = -2$) aus.

Lösungen:

1)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(I) \quad \lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$(II) \quad \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$$

$$(III) \quad 3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & -1 & | & 0 \\ 3 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & -5 & -2 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & -8 & | & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

\Rightarrow die Vektoren sind linear unabhängig

\Rightarrow die Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^3

2)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & k & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -k & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -k & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

\Rightarrow das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

\Rightarrow die Vektoren bilden für alle $k \in \mathbb{R}$ eine Basis des \mathbb{R}^3

3)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & | & 0 \\ (II) \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & | & 0 \\ (III) \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & | & 0 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & | & 0 \\ (II) \begin{pmatrix} 0 & 5 & -2 & | & 0 \\ (III) \begin{pmatrix} 0 & 0 & k & | & 0 \end{array} \end{array}$$

\Rightarrow für $k \neq 0$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

\Rightarrow für $k \neq 0$ bilden die Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3

4)

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & | & 0 \\ (II) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -k & | & 0 \\ (III) \begin{pmatrix} -2 & 2 & -2-k & | & 0 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & -1 & k & | & 0 \\ (II) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -k & | & 0 \\ (III) \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2+k & | & 0 \end{array} \end{array}$$

\Rightarrow für $k \neq 2$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

\Rightarrow für $k \neq 2$ bilden die Vektoren eine Basis des \mathbb{R}^3

5.1

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} p+4 \\ -2p \\ 3-4p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & 4 & p+4 & | & 0 \\ (II) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2p & | & 0 \\ (III) \begin{pmatrix} -3 & 2 & 3-4p & | & 0 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & 4 & p+4 & | & 0 \\ (II) \begin{pmatrix} 0 & -8 & -8 & | & 0 \\ (III) \begin{pmatrix} 0 & 14 & 15-p & | & 0 \end{array} \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 4 & p+4 & | & 0 \\ 0 & -8 & -8 & | & 0 \\ 0 & 0 & 8p-8 & | & 0 \end{array}$$

\Rightarrow für $p \neq 1$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

\Rightarrow die Vektoren sind linear unabhängig

\Rightarrow die Vektoren bilden eine Basis des \mathbb{R}^3

5.2

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & -5 \\ 2 & 0 & -4 & | & 2 \\ -3 & 2 & 11 & | & -3 \end{pmatrix} \\ (II) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & -5 \\ 0 & -8 & -8 & | & 12 \\ 0 & 14 & 17 & | & -18 \end{pmatrix} \\ (III) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & -5 \\ 0 & -8 & -8 & | & 12 \\ 0 & 0 & -24 & | & -24 \end{pmatrix} \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} (I) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & -5 \\ 0 & -8 & -8 & | & 12 \\ 0 & 14 & 17 & | & -18 \end{pmatrix} \\ (II) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & -5 \\ 0 & -8 & -8 & | & 12 \\ 0 & 0 & -24 & | & -24 \end{pmatrix} \\ (III) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & | & -5 \\ 0 & -8 & -8 & | & 12 \\ 0 & 0 & -24 & | & -24 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(III) \Rightarrow -24\lambda_3 = -24 \Rightarrow \lambda_3 = 1$$

$$(II) \Rightarrow -8\lambda_2 - 8 \cdot 1 = 12 \Rightarrow \lambda_2 = -2,5$$

$$(I) \Rightarrow \lambda_1 - 4 \cdot 2,5 + 2 \cdot 1 = -5 \Rightarrow \lambda_1 = 3$$

$$\Rightarrow \vec{d} = 3 \cdot \vec{a} - 2,5 \cdot \vec{b} + \vec{c}_2$$