# <u>Basis und Dimension eines Vektorraumes</u>

<u>Definition:</u>

Jede Menge linear unabhängiger Vektoren, aus denen sich jeder Vektor des Raumes $\mathbb{R}^3$ bzw. der Ebene $\mathbb{R}^2$ erzeugen lässt, bildet eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.

<u>Folgerung:</u>

Drei bzw. zwei linear unabhängige Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bzw. des $\mathbb{R}^2$.
Jeder weitere Vektor lässt sich dann als Linearkombination der Basisvektoren darstellen.

Die Anzahl der Vektoren einer Basis heißt Dimension.

<u>Folgerung:</u>

Die Ebene $\mathbb{R}^2$ ist zweidimensional, der Anschauungsraum $\mathbb{R}^3$ ist dreidimensional.

<u>Aufgaben:</u>

1. Prüfen Sie, ob die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

2. Bestimmen Sie den Wert von $k\in\mathbb{R}$ so, dass die Vektoren
$\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}k\\1\\0\end{pmatrix}$
eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

3. Bestimmen Sie den Wert von $k\in\mathbb{R}$ so, dass die Vektoren
$\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b}=\begin{pmatrix}1\\3\\0\end{pmatrix}$ und $\vec{c}=\begin{pmatrix}4\\1\\k\end{pmatrix}$
eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

4. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ mit dem Ursprung 0 sind die Punkte A(1/0/-2), B(-1/2/2) und $C_k$(k/-k/-2-k) mit $k\in\mathbb{R}$ gegeben.
Untersuchen Sie, für welche Werte von k die drei Vektoren $\overrightarrow{0A}, \overrightarrow{0B}$ und $\overrightarrow{0C_k}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.

5. Ermitteln Sie die Werte von k, für welche die drei Vektoren $\begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4k \\ 0 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. (Abitur 2005 BI)

6. Im $\mathbb{R}^3$ sind die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$ und $\vec{c_k} = \begin{pmatrix} -1 \\ k+2 \\ k+3 \end{pmatrix}$ mit $k \in \mathbb{R}$ gegeben.
   Untersuchen Sie, für welche Werte von k die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c_k}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden. (Abitur 2013 BI)

Lösungen:

1.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(I) $\lambda_1 + 2\lambda_2 + \lambda_3 = 0$

(II) $\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0$

(III) $3\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$

2.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} \text{(I)} \\ \text{(II)} \\ \text{(III)} \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -k & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ das LGS ist eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ die Vektoren bilden für alle $k \in \mathbb{R}$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$

3.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \neq 0$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $k \neq 0$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$

4.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} k \\ -k \\ -2-k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ -2 & 2 & -2-k & 0 \end{array} \right) \rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & k & 0 \\ 0 & 2 & -k & 0 \\ 0 & 0 & -2+k & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \neq 2$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ für alle $k \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ für $k \neq 2$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$

5.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} k \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ k \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} k & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 4k & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right) \to \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 4k & 0 \\ k & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

$$\to \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 4k & 0 \\ 0 & -k & 3 & 0 \end{array} \right) \to \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 4k & 0 \\ 0 & 0 & 4k+3 & 0 \end{array} \right)$$

$\Rightarrow$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}; 0 \right\}$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\Rightarrow$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{4}; 0 \right\}$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

6.

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ k+2 \\ k+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & k+2 & 0 \\ 0 & 5 & k+3 & 0 \end{array} \right) \to \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2k+2 & 0 \\ 0 & 5 & k+3 & 0 \end{array} \right)$$

$$\to \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2k+2 & 0 \\ 0 & 0 & -8k-4 & 0 \end{array} \right)$$

$-8k - 4 = 0 \Rightarrow k = -0{,}5$

$\Rightarrow$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\}$ ist das LGS eindeutig lösbar mit $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$\Rightarrow$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\}$ sind die Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\overrightarrow{c_k}$ sind linear unabhängig.

$\Rightarrow$ für $k \in \mathbb{R} \setminus \{-0{,}5\}$ bilden die Vektoren eine Basis des $\mathbb{R}^3$.