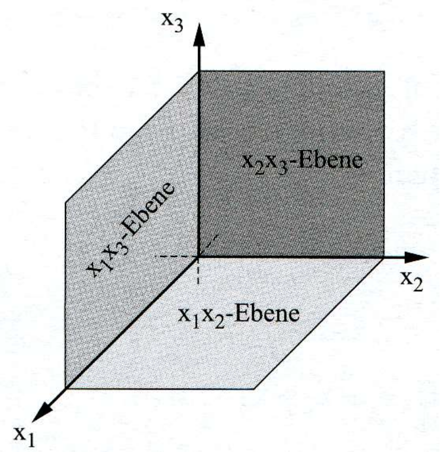
Besondere Ebenen

Lagebeziehung eines Punktes P bezüglich einer Ebene E:

Prüfen Sie, ob der Punkt P(-2/3/4) in der Ebene $E: 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 5 = 0$ liegt.

$3 \cdot (-2) + 3 + 2 \cdot 4 - 5 = 0 \quad \Rightarrow 0 = 0 \quad \Rightarrow P \in E$

(1) Koordinatenebenen:



Gleichung der x_1-x_2-Ebene in Parameterform:

$$E: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

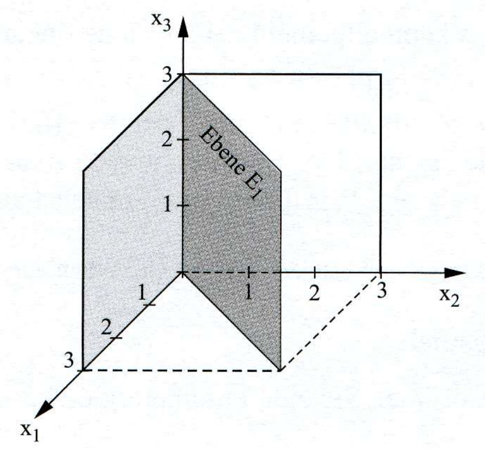
In Normalenform: $x_3 = 0$

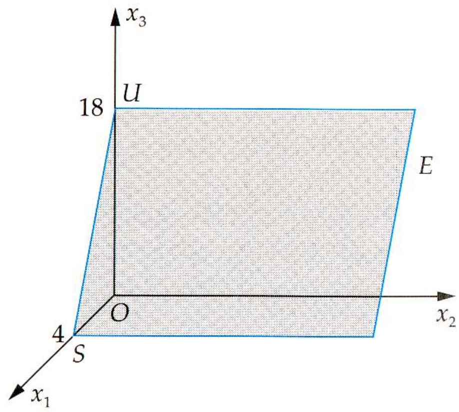
Analog erhält man:

x_2-x_3-Ebene: $x_1 = 0$

x_1-x_3-Ebene: $x_2 = 0$

(2) Ebene, die parallel zu einer Koordinatenachse liegen:





$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E_1: x_1 = x_2 \quad \Rightarrow E_1: x_1 - x_2 = 0$

E_1 enthält die x_3-Achse, da $n_0 = 0$

Analog erhält man:

$E_2: n_1x_1 + n_3x_3 = 0$ (enthält die x_2-Achse)

$E_3: n_2x_2 + n_3x_3 = 0$ (enthält die x_1-Achse)

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$E_1: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow E_1: 9x_1 + 2x_3 - 36 = 0$

E_1 parallel zur x_2-Achse, da $n_0 \neq 0$

Analog erhält man:

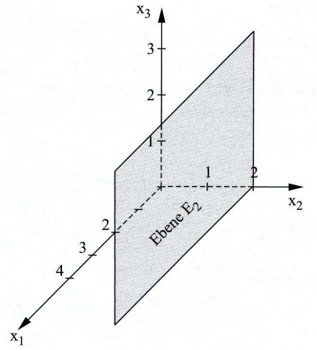
$E_2: n_1x_1 + n_2x_2 + n_0 = 0$ (parallel zur x_3-Achse)

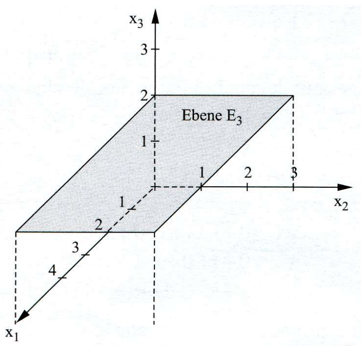
$E_3: n_2x_2 + n_3x_3 + n_0 = 0$ (parallel zur x_1-Achse)

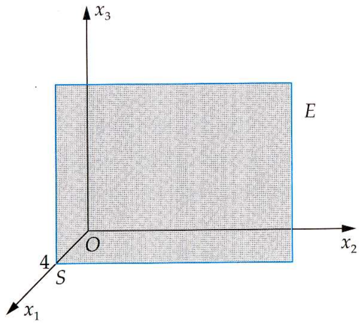
Allgemein gilt:

Tritt in der Normalenform einer Ebene E eine Koordinate nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu dieser Koordinatenachse.

(3) Ebene, die parallel zu zwei Koordinatenachsen liegt:







$$E:\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

In Normalenform:

$E: x_2 = 2 \quad \Rightarrow E: x_2 - 2 = 0$ $\qquad$ $E: x_3 = 2 \quad \Rightarrow E: x_3 - 2 = 0$ $\qquad$ $E: x_1 = 4 \quad \Rightarrow E: x_1 - 4 = 0$

Parallelebenen zu den Koordinatenebenen:

$E_1: x_1 = a_1$ (parallel zur x_2-x_3-Ebene) $\Rightarrow S(a_1 / 0 / 0)$

$E_2: x_2 = a_2$ (parallel zur x_1-x_3-Ebene) $\Rightarrow S(0 / a_2 / 0)$

$E_3: x_3 = a_3$ (parallel zur x_1-x_2-Ebene) $\Rightarrow S(0 / 0 / a_3)$

Allgemein gilt:

Treten in der Normalform einer Ebene E zwei Koordinaten nicht auf, dann liegt die Ebene E parallel zu der Ebene, die durch die Koordinatenachsen der fehlenden Koordinaten aufgespannt wird.

Aufgabe:

Bestimmen Sie die Gleichung einer Ebene E, die auf der Geraden

$g:\vec{x}=\begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\5\end{pmatrix}$ mit s $\in\mathbb{R}$ senkrecht steht und den Punkt P(7/p_2/p_3) der Geraden g enthält.

Lösung:

Berechnung der fehlenden Koordinaten von P:

$(I) \quad 7 = 3 + 4s \qquad \Rightarrow s = 1$

$(II) \quad p_2 = 2 - 3s \qquad \Rightarrow p_2 = -1$

$(III) \quad p_3 = -1 + 5s \qquad \Rightarrow p_3 = 4$

$\Rightarrow P(7/-1/4)$

$$E : \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \circ \left[\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \right] = 0$$

$E : 4(x_1 - 7) - 3(x_2 + 1) + 5(x_3 - 4) = 0$

$E : 4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 51 = 0$