Besonderheiten von Kurven: Randextrema

Beispiel: $f(x) = x^3 + 3x^2 - 4 \quad D_f = [-3;1,5]$

Nullstellen:
$f(x) = 0 \quad \Rightarrow x^3 + 3x^2 - 4 = 0$
$x_1 = 1$ (durch Ausprobieren)
Polynomdivision: $(x^3 + 3x^2 - 4):(x-1) = x^2 + 4x + 4$
$x^2 + 4x + 4 = 0 \quad \Rightarrow (x+2)^2 = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -2$
f hat zwei Nullstellen bei x_1=1 (einfach) und bei x_2=-2 (doppelt).

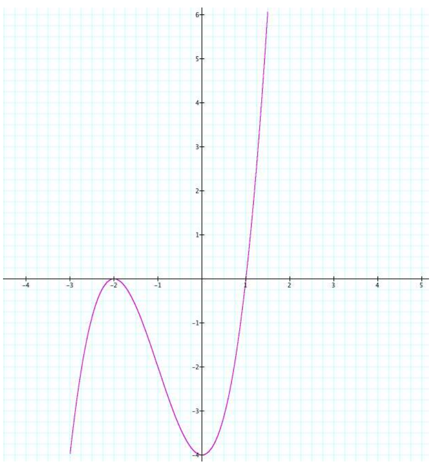
Extrempunkte:
$f'(x) = 3x^2 + 6x$
$f'(x) = 0 \quad \Rightarrow 3x^2 + 6x = 0 \quad \Rightarrow 3x(x+2) = 0 \quad \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_2 = -2$
Art der Extrema: Skizze von f′

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei x_2 = -2 HP(-2/0) Tiefpunkt bei x_1 = 0 TP(0/-4)

Wendepunkte:
$f''(x) = 6x + 6$
$f''(x) = 0 \quad \Rightarrow 6x + 6 = 0 \quad \Rightarrow x = -1$
Skizze von f′′:

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei x = -1 WP(-1/-2)

Graph:



Betrachtung der Ränder des Definitionsbereichs:

$x = -3$: $f'(-3+h) > 0$ (da f´ im Bereich -3 < x < -2 positiv ist)

$\Rightarrow$ bei x = -3 liegt ein Randminimum vor

$x = 1{,}5$: $f'(1{,}5-h) > 0$ (da f´ im Bereich 0 < x < 1,5 positiv ist)

$\Rightarrow$ bei x = 1,5 liegt ein Randmaximum vor

f sei differenzierbar auf [a;b]. Gilt für alle h > 0, dass f´(a + h) > 0 (< 0), so hat G_f an der Stelle x = a ein Randminimum (Randmaximum).
Gilt für alle h > 0, dass f´(b – h) > 0 (< 0), so hat G_f an der Stelle x = b ein Randmaximum (Randminimum).

Relatives Maximum bei x = -2
Absolutes Maximum bei x = 1,5 (größtmöglicher Funktionswert in D_f)
Relatives Minimum bei x = 0
Absolutes Minimum bei x = 0 und x = -3 (kleinstmöglicher Funktionswert in D_f)

<u>Aufgabe:</u> $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x + 4 \qquad D_f = [-5;1]$

Nullstellen:

$x^3 + 6x^2 + 9x + 4 = 0 \quad x_1 = -1$ (durch Ausprobieren)

$(x^3 + 6x^2 + 9x + 4) : (x + 1) = x^2 + 5x + 4$

$x^2 + 5x + 4 = 0 \quad \Rightarrow (x + 4)(x + 1) = 0 \quad \Rightarrow x_2 = -4 \quad x_3 = -1$

f hat zwei Nullstellen bei x_2 = -4 (einfach) und bei x_1 = -1 (doppelt)

Extrempunkte:

$f'(x) = 3x^2 + 12x + 9$

$3x^2 + 12x + 9 = 0 \qquad \Rightarrow x_1 = -3 \qquad x_2 = -1$

Art der Extrema: Skizze von f′

$\Rightarrow$ Hochpunkt bei x = -3 HP(-3/4) Tiefpunkt bei x = -1 TP(-1/0)

Wendepunkte:

$f''(x) = 6x + 12$

$6x + 12 = 0 \quad \Rightarrow x = -2$

Skizze von f′′:

$\Rightarrow$ Wendepunkt bei x = -2 WP(-2/2)

Betrachtung der Ränder des Definitionsbereichs

$x = -5: \quad f'(-5 + h) > 0 \quad \Rightarrow$ Randminimum bei x = -5 (-5/-16)

$x = 1: \quad f'(1 - h) > 0 \quad \Rightarrow$ Randmaximum bei x = 1 (1/20)

Absolutes Minimum bei x = -5 und absolutes Maximum bei x = 1