

Bruchterme

1. Definitionsmenge und Kürzen von Bruchtermen

Vor dem Kürzen eines Bruchterms müssen zuerst der Zähler und Nenner faktorisiert werden.

Beispiele:

$$1. \frac{1}{x^2 - 4}$$

$$2. \frac{3x}{2x - x^2}$$

$$3. \frac{7 - 21x}{15x - 5}$$

$$4. \frac{(4x^2 - x) + (8x - 2)}{4x - 1}$$

$$5. \frac{12x^2 - 36x - 8xy + 24y}{4x^2 - 12x}$$

2. Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen

Bruchterme mit gleichem Nenner werden addiert (subtrahiert), indem man die Zähler addiert (subtrahiert) und den Nenner beibehält.

$$\frac{Z_1}{N} + \frac{Z_2}{N} = \frac{Z_1 + Z_2}{N} \quad \frac{Z_1}{N} - \frac{Z_2}{N} = \frac{Z_1 - Z_2}{N}$$

Haben Bruchterme verschiedene Nenner, so muss man sie vor dem Addieren (Subtrahieren) auf den gleichen Nenner bringen.

Beispiele:

$$1. \frac{1}{2x} - \frac{1}{6x}$$

$$2. \frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1}$$

$$3. \frac{1}{2x-6} + \frac{5}{3x-9} - \frac{1}{x}$$

$$4. \frac{4x-5y}{6x} - \frac{5x-y}{12x}$$

$$5. \frac{6-x}{2x-6} - \frac{9x^2-30x}{18x-6x^2} - 1$$

3. Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen

Bruchterme werden miteinander multipliziert, indem man das Produkt der Zähler durch das Produkt der Nenner dividiert.

$$\frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{N_1 \cdot N_2}$$

Durch einen Bruchterm wird dividiert, indem man mit seinem Kehrbuch multipliziert.

$$\frac{Z_1}{N_1} : \frac{Z_2}{N_2} = \frac{Z_1}{N_1} \cdot \frac{N_2}{Z_2} = \frac{Z_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot Z_2}$$

Beispiele:

1. $\frac{2x^2}{15y} \cdot \frac{25y^2}{4x^3}$

2. $\frac{5x^2 + 5yx}{x^2 - y^2} \cdot (4x - 4y)$

3. $\frac{6(u - v)}{25uv} : \frac{8(v - u)}{15uv}$

4. $\frac{3a^2 - 27}{6a + 12} : \frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 + 4a + 4}$

4. Zusammengesetzte Bruchterme

Beispiele:

1. $\left(\frac{2u + 2}{3u^2 - 12} + \frac{1}{4 - 2u} \right) : \frac{2u + 6}{9u + 18}$

2. $\left(\frac{-1}{x + 3} - \frac{6 - 2x}{x^2 - 9} \right) : \frac{9 - x^2}{x^2 + 6x + 9}$

5. Bruchgleichungen

1. $\frac{2 + 3x}{1 - x} = -\frac{1}{2}$

2. $\frac{x}{x - 3} = \frac{x + 2}{x}$

3. $\frac{x - 4}{x + 1} = \frac{x + 2}{x - 1}$

4. $\frac{x - 1}{x - 2} = \frac{x + 5}{x + 2}$

6. Bruchgleichungen

$$1. \frac{x-2}{2x+3} > 0$$

$$2. \frac{2+3x}{2x-3} \geq 0$$

$$3. \frac{3x+7}{x+5} < 2$$

$$4. 3 \leq \frac{2x+5}{x+5}$$

Lösungen

1. Definitionsmenge und Kürzen von Bruchtermen

- $\frac{1}{x^2-4} = \frac{1}{(x-2)(x+2)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
- $\frac{3x}{2x-x^2} = \frac{3x}{x(2-x)} = \frac{3}{2-x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 2\}$
- $\frac{7-21x}{15x-5} = \frac{-7(3x-1)}{5(3x-1)} = -\frac{7}{5} \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{3} \right\}$
- $\frac{(4x^2-x)+(8x-2)}{4x-1} = \frac{x \cdot (4x-1) + 2(4x-1)}{4x-1} = \frac{(4x-1)(x+2)}{4x-1} = x+2 \quad D = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{4} \right\}$
- $\frac{12x^2-36x-8xy+24y}{4x^2-12x} = \frac{12x(x-3)-8y(x-3)}{4x(x-3)} = \frac{(x-3)(12x-8y)}{4x(x-3)} =$
 $\frac{12x-8y}{4x} = \frac{4(3x-2y)}{4x} = \frac{3x-2y}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$

2. Addieren und Subtrahieren von Bruchtermen

- $\frac{1}{2x} - \frac{1}{6x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad HN: 6x \Rightarrow \frac{3}{6x} - \frac{1}{6x} = \frac{2}{6x} = \frac{1}{3x}$
- $\frac{1}{x-1} - \frac{x}{x-1} = \frac{1-x}{x-1} = \frac{-(x-1)}{x-1} = -1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
- $\frac{1}{2x-6} + \frac{5}{3x-9} - \frac{1}{x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\} \quad HN: 6x(x-3)$
 $\Rightarrow \frac{3x}{6x(x-3)} + \frac{5 \cdot 2x}{6x(x-3)} - \frac{6(x-3)}{6x(x-3)} = \frac{3x+10x-6x+18}{6x(x-3)} = \frac{7x+18}{6x(x-3)}$
- $\frac{4x-5y}{6x} - \frac{5x-y}{12x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0\} \quad HN: 12x$
 $\Rightarrow \frac{2 \cdot (4x-5y)}{12x} - \frac{5x-y}{12x} = \frac{8x-10y-5x+y}{12x} = \frac{3x-9y}{12x} = \frac{x-3y}{4x}$
- $\frac{6-x}{2x-6} - \frac{9x^2-30x}{18x-6x^2} - 1 \quad D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\} \quad HN: 6x(x-3)$
 $\Rightarrow \frac{3x(6-x)}{6x(x-3)} - \frac{-(9x^2-30x)}{6x(x-3)} - \frac{6x(x-3)}{6x(x-3)} = \frac{18x-3x^2+9x^2-30x-6x^2+18x}{6x(x-3)} =$
 $\frac{6x}{6x(x-3)} = \frac{1}{x-3}$

3. Multiplizieren und Dividieren von Bruchtermen

- $$1. \frac{2x^2}{15y} \cdot \frac{25y^2}{4x^3} = \frac{2x^2 \cdot 25y^2}{15y \cdot 4x^3} = \frac{5y}{6x} \quad D: x \neq 0; y \neq 0$$
- $$2. \frac{5x^2 + 5yx}{x^2 - y^2} \cdot (4x - 4y) = \frac{(5x^2 + 5yx) \cdot (4x - 4y)}{x^2 - y^2} = \frac{5x(x+y) \cdot 4(x-y)}{(x-y)(x+y)} = 20x$$
$$D: x \neq y; x \neq -y$$
- $$3. \frac{6(u-v)}{25uv} : \frac{8(v-u)}{15uv} = \frac{6(u-v)}{25uv} \cdot \frac{15uv}{8(v-u)} = -\frac{9}{20} \quad D: u \neq 0; v \neq 0; u \neq v$$
- $$4. \frac{3a^2 - 27}{6a + 12} : \frac{a^2 - 6a + 9}{a^2 + 4a + 4} = \frac{3(a-3)(a+3)}{6(a+2)} \cdot \frac{(a+2)^2}{(a-3)^2} = \frac{(a+3)(a+2)}{2(a-3)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 3\}$$

4. Zusammengesetzte Bruchterme

- $$1. \frac{3}{4(u+3)} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3; -2; 2\}$$
- $$2. \frac{1}{3-x} \quad D = \mathbb{R} \setminus \{-3; 3\}$$

5. Bruchgleichungen

1.
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$
 $2(2 + 3x) = -(1 - x) \Rightarrow 4 + 6x = -1 + x \Rightarrow 5x = -5$
 $\Rightarrow x = -1 \Rightarrow L = \{-1\}$
2.
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{0; 3\}$
 $x \cdot x = (x - 3)(x + 2) \Rightarrow x^2 = x^2 - x - 6 \Rightarrow -x - 6 = 0$
 $\Rightarrow x = -6 \Rightarrow L = \{-6\}$
3.
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$
 $(x - 4)(x - 1) = (x + 2)(x + 1) \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = x^2 + 3x + 2 \Rightarrow -8x = -2$
 $\Rightarrow x = \frac{1}{4} \Rightarrow L = \left\{ \frac{1}{4} \right\}$
4.
Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$
 $(x - 1)(x + 2) = (x + 5)(x - 2) \Rightarrow x^2 + x - 2 = x^2 + 3x - 10 \Rightarrow -2x = -8$
 $\Rightarrow x = 4 \Rightarrow L = \{4\}$

6. Bruchungleichungen

1.

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-1,5\}$

Nullstellen berechnen: $x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$ $2x + 3 = 0 \Rightarrow x = -1,5$

Vorzeichenverteilung:

		$-1,5$		2	
$x - 2$	-	-	-	+	
$2x + 3$	-	-	+	+	
$\frac{x-2}{2x+3}$	+	-	-	+	

$$\Rightarrow L =]-\infty; -1,5[\cup]2; \infty[$$

2.

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{1,5\}$

Nullstellen berechnen: $2 + 3x = 0 \Rightarrow x = -\frac{2}{3}$ $2x - 3 = 0 \Rightarrow x = 1,5$

Vorzeichenverteilung:

		$-\frac{2}{3}$		$1,5$	
$2 + 3x$	-	-	+	+	
$2x - 3$	-	-	-	+	
$\frac{2+3x}{2x-3}$	+	-	-	+	

$$\Rightarrow L =]-\infty; -\frac{2}{3}] \cup]1,5; \infty[$$

3.

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$$\frac{3x+7}{x+5} < 2 \Rightarrow \frac{3x+7}{x+5} - 2 < 0 \Rightarrow \frac{3x+7-2(x+5)}{x+5} < 0 \Rightarrow \frac{x-3}{x+5} < 0$$

Nullstellen berechnen: $x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$ $x + 5 = 0 \Rightarrow x = -5$

Vorzeichenverteilung:

		-5		3	
$x - 3$	-	-	-	+	
$x + 5$	-	-	+	+	
$\frac{x-3}{x+5}$	+	-	-	+	

$$\Rightarrow L =]-5; 3[$$

3.

Definitionsmenge: $D = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$

$$3 \leq \frac{2x+5}{x+5} \Rightarrow 0 \leq \frac{2x+5}{x+5} - 3 \Rightarrow 0 \leq \frac{2x+5-3(x+5)}{x+5} \Rightarrow 0 \leq \frac{-x-10}{x+5}$$

Nullstellen berechnen: $-x-10=0 \Rightarrow x=-10$ $x+5=0 \Rightarrow x=-5$

Vorzeichenverteilung:

	-10	-5	
$-x-10$	+	-	-
$x+5$	-	-	+
$\frac{-x-10}{x+5}$	-	+	-

$$\Rightarrow L = [-10; -5[$$