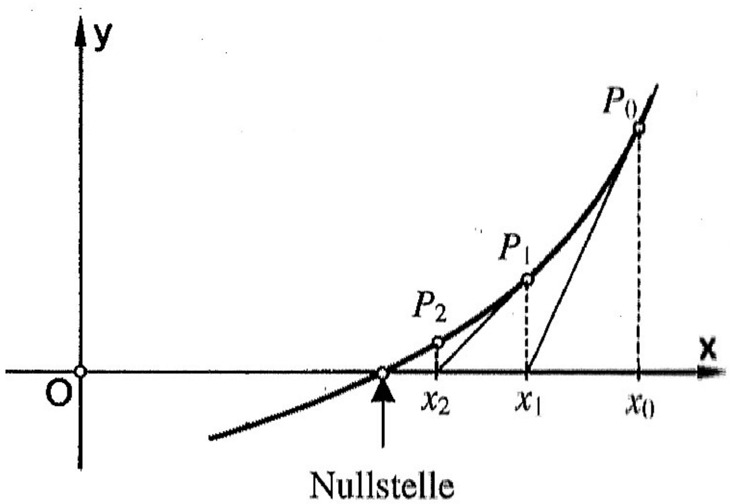
Das Newton Verfahren

Es ist bei vielen Problemstellungen nötig die Nullstellen einer Funktion zu berechnen, was aber in der Praxis nicht immer algebraisch möglich ist. An die Stelle der exakten Lösung tritt dann eine Näherungslösung. Sie haben bereits zwei Verfahren zur näherungsweisen Bestimmung von Nullstellen kennengelernt (Intervallhalbierungsverfahren, Regula falsi). Eine weitere Möglichkeit, Nullstellen näherungsweise zu bestimmen, bietet das sogenannte Newton Verfahren (Tangentenverfahren).

Graphische Erläuterung des Newton Verfahrens:



1. Man wählt eine Startstelle x_0 mit $f(x_0) \neq 0$ und bestimmt für die gegebene Funktion f an der Stelle x_0 die Gleichung der Tangente.
2. Man berechnet die Nullstelle dieser Tangente.
3. Man setzt dieses Verfahren fort und ermittelt eine Gleichung der Tangente an der Stelle x_1 und die Nullstelle x_2 dieser Tangente usw.

Herleitung einer allgemeinen Formel:

1. Bestimmung der Tangente t im Punkt $P(x_0/f(x_0))$ an G_f:

$$t: y = mx + t$$
$$m = f'(x_0) \qquad \Rightarrow y = f'(x_0) \cdot x + t$$
$$P(x_0 / f(x_0)) \ \textit{einsetzen}:$$
$$\Rightarrow f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + t \qquad \Rightarrow t = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$
$$\Rightarrow t: y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0 = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

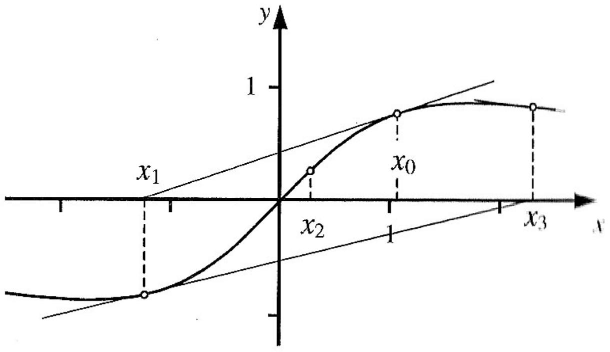
2. Bestimmung der Nullstelle von t liefert neuen Startwert x_1:

$$f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0) = 0 \qquad \Rightarrow f'(x_0)(x - x_0) = -f(x_0)$$
$$\Rightarrow x - x_0 = -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \qquad \Rightarrow x = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \quad \text{(mit } f'(x_0) \neq 0\text{)}$$

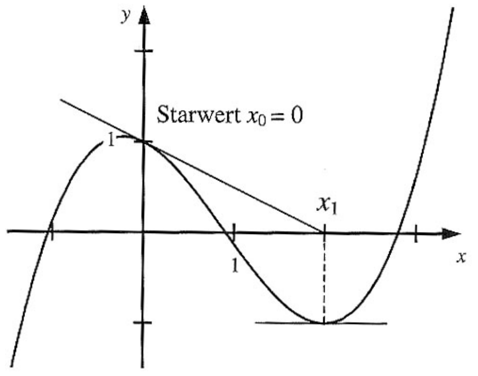
allgemein: $\boxed{x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}}$

Grenzen des Verfahrens:

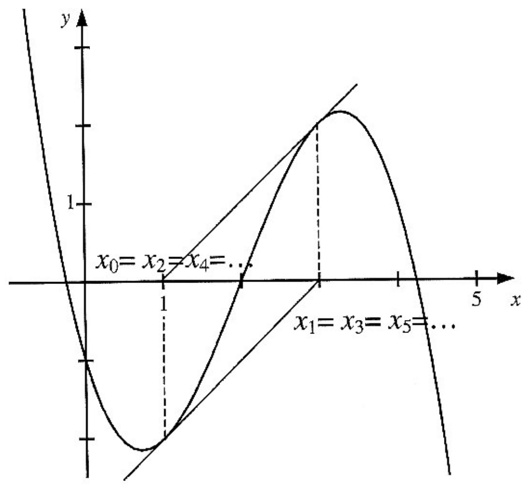
1) Für einen ungünstigen Startwert entfernen sich die Iterationswerte des Newton-Verfahrens immer mehr von der gesuchten Nullstelle.



2) Das Verfahren lässt sich rechnerisch nicht fortsetzen, da im nächsten Schritt f´(x) = 0 ist.



3) Das Verfahren „hängt sich auf“.



Aufgaben:

1. Berechnen Sie mit Hilfe des Newton Verfahrens einen Näherungswert für eine Lösung der Gleichung $8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0$. Verwenden Sie als Startwert $a_1 = 7$, führen Sie zwei Schritte des Näherungsverfahrens durch und runden Sie ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen (Abitur 2005 AI).

2. Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + 2x - 2$.
   a) Zeigen Sie, dass die Funktion im Intervall [0;1] genau eine Nullstelle besitzt.
   b) Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton Verfahrens einen Näherungswert dieser Nullstelle. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 1$, führen Sie zwei Schritte des Näherungsverfahrens durch und runden Sie ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

3. Bestimmen Sie mit Hilfe des Newton Verfahrens einen Näherungswert für die Schnittstelle der Funktionen $f(x) = -x^3 - x$ und $g(x) = -5$. Verwenden Sie als Startwert $x_0 = 1$, führen Sie drei Schritte des Näherungsverfahrens durch und runden Sie ihr Ergebnis auf zwei Nachkommastellen.

4. Begründen Sie, dass sich die Graphen von $f_{-1}(x) = -4 \cdot \dfrac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$ und $g(x) = -4 \cdot \sin\left(-\dfrac{\pi}{4}x + \dfrac{\pi}{2}\right)$ im Intervall [6;8] schneiden.
   Berechnen Sie, ausgehend vom Startwert $x_0 = 7$, mit dem Newton-Verfahren einen Näherungswert für die Abszisse dieses Schnittpunktes. Führen Sie einen Näherungsschritt durch und geben Sie das Ergebnis auf eine Nachkommastelle gerundet an. (Abitur 2007 AI)

Lösungen:

1) $f(a) = 8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 \qquad \frac{df(a)}{da} = 32a^3 + 27a^2 - 4000$

k	a_k	$f(a_k)$	$f'(a_k)$	$a_k - \frac{f(a_k)}{f'(a_k)}$
1	7	-7705	8299	7,9284
2	7,9284	2382,34	13645,22	7,7538

$\Rightarrow a \approx 7{,}75$

2a)

$f(0) = -2 < 0 \qquad f(1) = 1 > 0$

Da f(x) im Intervall [0;1] stetig ist, hat die Funktion f(x) im Intervall [0;1] nach Zwischenwertsatz mindestens eine Nullstelle

$f'(x) = 3x^2 + 2 > 0$ für alle $x \in [0;1]$ $\Rightarrow G_f$ ist streng monoton steigend in [0;1]

$\Rightarrow$ f(x) besitzt im Intervall [0;1] genau eine Nullstelle

2b) $f(x) = x^3 + 2x - 2 \qquad f'(x) = 3x^2 + 2$

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$	$x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$
0	1	1	5	0,8
1	0,8	0,112	3,92	0,7714

$\Rightarrow x \approx 0{,}77$

3)

Schnittstelle: $f(x) = g(x) \Rightarrow -x^3 - x = -5 \qquad \Rightarrow -x^3 - x + 5 = 0$

$h(x) = -x^3 - x + 5 \qquad h'(x) = -3x^2 - 1$

k	x_k	$h(x_k)$	$h'(x_k)$	$x_k - \frac{h(x_k)}{h'(x_k)}$
0	1	3	-4	1,75
1	1,75	-2,1094	-10,1875	1,5429
2	1,5429	-0,2158	-8,1416	1,5164

$\Rightarrow x \approx 1{,}52$

4)

$$d(x) = g(x) - f_{-1}(x) = -4 \cdot \sin\left(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) + 4 \cdot \frac{x^2 - 4}{x^2 + 4}$$

$d(6) = 3{,}2 \qquad d(8) = -0{,}4706$

$\Rightarrow$ da g(x) und $f_{-1}(x)$ stetig sind, haben die Funktionen g(x) und $f_{-1}(x)$ im Intervall [6;8] mindestens einen Schnittpunkt

$$d'(x) = \pi \cdot \cos\left(-\frac{\pi}{4}x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{64x}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\Rightarrow x_1 = 7 - \frac{d(7)}{d'(7)} \approx 7 - \frac{0{,}57}{-2{,}06} \approx 7{,}3$$