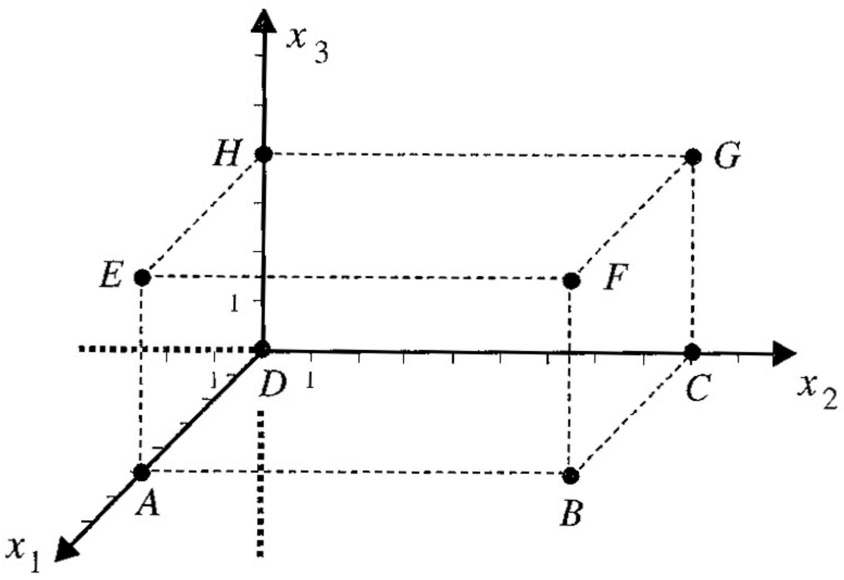
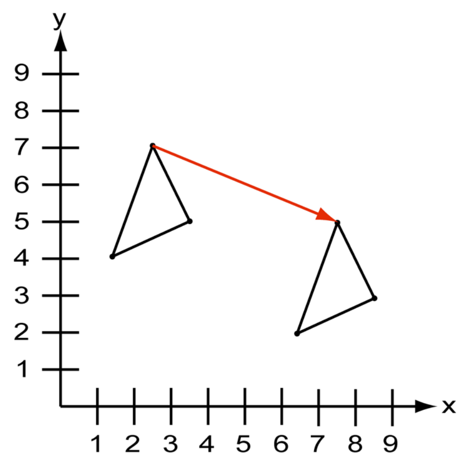
Der Vektorbegriff



Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Quaders.

A(5/0/0), B(5/9/0), C(0/9/0), D(0/0/0), E(5/0/4), F(5/9/4), G(0/9/4), H(0/0/4)

In der folgenden Abbildung ist eine Verschiebung (Translation) dargestellt. Dabei wird durch einen Verschiebungspfeil (Vektor) jedem Punkt P der Ebene oder Raumes genau ein Bildpunkt P´ zugeordnet.



Die Menge aller Pfeile einer Translation wird als Verschiebungsvektor oder kurz Vektor bezeichnet.

Länge eines Vektors:

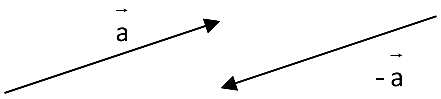
Die Maßzahl für die Länge eines Vektors $\vec{a}$ wird mit $|\vec{a}|$ (Betrag von $\vec{a}$) bezeichnet.

Der Vektor mit der Länge Null heißt Nullvektor.
Im Raum gilt: $\vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Weitere wichtige Vektoren:

1) Gegenvektor:
Ein zu einem Vektor $\vec{a}$ entgegengesetzt orientierter Vektor gleicher Länge heißt Gegenvektor oder inverser Vektor zu $\vec{a}$.

Bezeichnung: $-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{pmatrix}$



2) Einheitsvektor:
Ein Vektor der Länge 1 heißt Einheitsvektor oder normierter Vektor.

Bezeichnung: $\vec{a}^{\,0}$

3) Verbindungsvektor zweier Punkte

$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$ „Spitze minus Fuß“

4) Ortsvektor

Die Translation, die den Ursprung 0 in den Punkt P abbildet, heißt Ortsvektor von P.

Bezeichnung: $\overrightarrow{0P}$ oder $\vec{p}$ $\overrightarrow{0P} = \begin{pmatrix} p_1 - 0 \\ p_2 - 0 \\ p_3 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix}$

Aufgaben:

1) Bestimmen Sie zu P den Bildpunkt Q bei Verschiebung um den Vektor $\vec{a}$.

a) $P(0/-2)$ $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

b) $P(-1/-1/0)$ $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{a}$, der den Punkt P in den Punkt Q verschiebt.

a) P(1/-2) Q(-1/-2)

b) P(1/-1/2) Q(-2/-2/5)

3) Bestimmen Sie zum Punkt Q und zum Vektor $\vec{a}$ den Urbildpunkt P.

a) $Q(0/-1)$ $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) $Q(-3/1/-1)$ $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

4) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass Q der Bildpunkt von P bei der Translation $\vec{a}$ ist.

a) $P(a/2/c)$ $\quad Q(1/b/3)$ $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$

b) $P(a/2b/3)$ $\quad Q(2b/1/c)$ $\quad \vec{a}=\begin{pmatrix} 2c \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1a) Q(3/2)   1b) Q(0/1/1)

2a) $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2b) $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3a) P(3/-3)   3b) P(-3/1/-2)

4a)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (I) $1-a=c$

(II) $b-2=-2 \quad \Rightarrow b=0$

(III) $3-c=c \quad \Rightarrow c=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 1-a=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

4b)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ (I) $2b-a=2c$

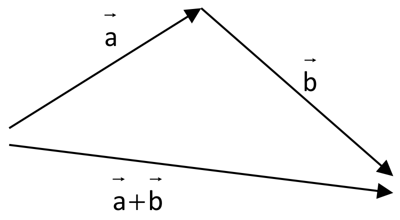
(II) $1-2b=2a \quad \Rightarrow 2b=1-2a$

(III) $c-3=1 \quad \Rightarrow c=4$

$\Rightarrow 1-2a-a=2c \quad \Rightarrow 1-3a=8 \quad \Rightarrow a=-\frac{7}{3}$

$\Rightarrow 2b=1-2\cdot(-\frac{7}{3}) \quad \Rightarrow 2b=\frac{17}{3} \quad \Rightarrow b=\frac{17}{6}$

Addition von Vektoren:



Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \end{pmatrix}$

Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_1+b_1 \\ a_2+b_2 \\ a_3+b_3 \end{pmatrix}$

Eigenschaften der Vektoraddition:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ der Ebene oder des Raumes gilt:

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ Kommutativgesetz

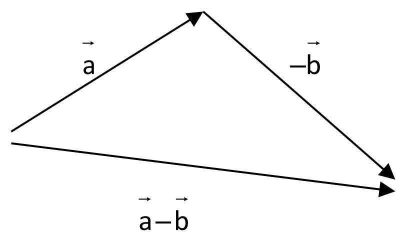
b) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ Assoziativgesetz

c) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (Neutrales Element)

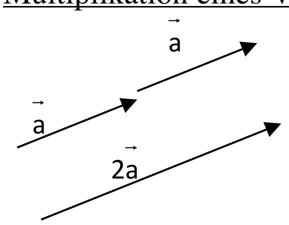
d) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (Inverses Element)

Subtraktion von Vektoren:

Die Differenz zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wird gebildet, indem man zu $\vec{a}$ den Gegenvektor von $\vec{b}$ addiert. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$



Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (S-Multiplikation):



$\vec{a}+\vec{a}=2\vec{a}$

Ein Vektor wird mit einer reellen Zahl multipliziert, indem man jede Koordinate mit dieser Zahl multipliziert.

$\alpha\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1 \\ \alpha\cdot a_2 \end{pmatrix}$ $\quad$ $\alpha\cdot\vec{a}=\alpha\cdot\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha\cdot a_1 \\ \alpha\cdot a_2 \\ \alpha\cdot a_3 \end{pmatrix}$

Folgerung:

Der Vektor $\alpha \cdot \vec{a}$ ist $|\alpha|$-mal so lang wie der Vektor $\vec{a}$.

$\alpha > 0$: $\vec{a}$ und $\alpha \cdot \vec{a}$ sind gleichgerichtet

$\alpha < 0$: $\vec{a}$ und $\alpha \cdot \vec{a}$ sind entgegengesetzt gerichtet

Eigenschaften der S-Multiplikation:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ der Ebene oder des Raumes und reelle Zahlen α, β gilt:

a) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ V(ektorielles) Distributivgesetz

b) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ S(kalares) Distributivgesetz

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ Assoziativgesetz

d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $\quad (-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

e) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Folgerung:

Durch die Multiplikation mit einer reellen Zahl kann jeder Vektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ zu einem Einheitsvektor normiert werden: $\vec{a}^{\,0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$

Anwendungen zum Rechnen mit Vektoren

(1) Gleichheit zweier Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann gleich, wenn ihre entsprechenden Komponenten übereinstimmen.

$$\vec{a} = \vec{b} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{matrix}$$

(2) Parallelität von Vektoren:

Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind genau dann parallel, wenn gilt:

$$\vec{b} = \alpha \cdot \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{matrix} b_1 = \alpha \cdot a_1 \\ b_2 = \alpha \cdot a_2 \\ b_3 = \alpha \cdot a_3 \end{matrix}$$

Aufgaben:

1) Gegeben sind die Punkte A(2/1/3), B(-1/3/-2) und C(0/1/-1).
Berechnen Sie die Vektoren

a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

b) $3\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}+2\cdot\overrightarrow{CA}$

2) Prüfen Sie, ob die angegebenen Vektoren parallel sind.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a}=\begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\vec{b}=\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1a)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-2\\0\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\2\\-9\end{pmatrix}$$

1b)

$$\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CB}=\begin{pmatrix}-1\\3\\-2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA}=-\overrightarrow{AC}=\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3\cdot\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CB}-2\cdot\overrightarrow{CA}=3\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9\\6\\-15\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\0\\8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\4\\-6\end{pmatrix}$$

2a)

$$\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix}2\\3\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}4\\6\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{I})\ 2=\alpha\cdot 4 \quad \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

$$(\mathrm{II})\ 3=\alpha\cdot 6 \quad \Rightarrow \alpha=\frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind parallel

2b)

$$\vec{a}=\alpha\cdot\vec{b} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix}-8\\-6\\4\end{pmatrix}=\alpha\cdot\begin{pmatrix}4\\-3\\-2\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (\mathrm{I})\ -8=\alpha\cdot 4 \quad \Rightarrow \alpha=-2$$

$$(\mathrm{II})\ -6=\alpha\cdot(-3) \quad \Rightarrow \alpha=2$$

$$(\mathrm{III})\ 4=\alpha\cdot(-2) \quad \Rightarrow \alpha=-2$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht parallel