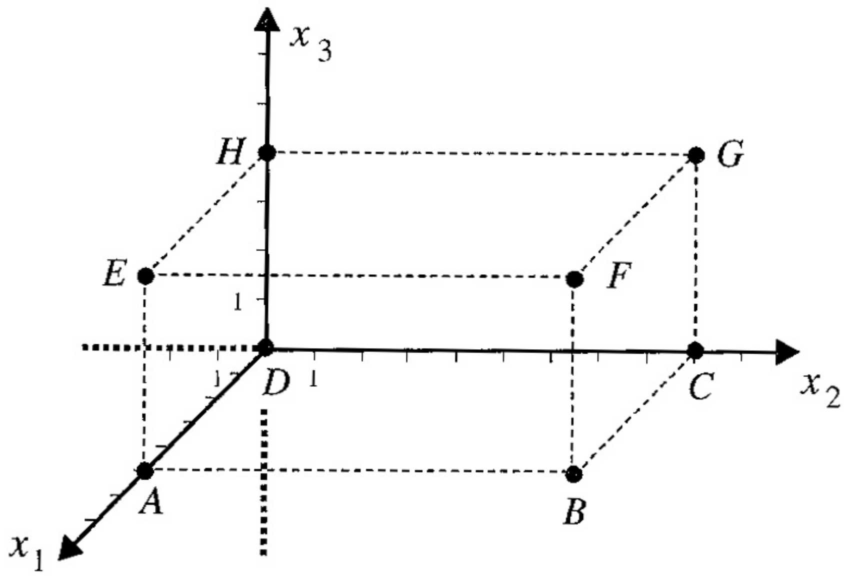
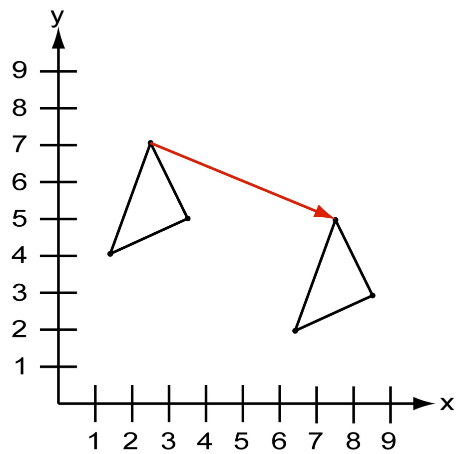
Der Vektorbegriff



Bestimmen Sie die Koordinaten der Eckpunkte des Quaders.

In der folgenden Abbildung ist eine Verschiebung (Translation) dargestellt. Dabei wird durch einen Verschiebungspfeil (Vektor) jedem Punkt P der Ebene oder Raumes genau ein Bildpunkt P´ zugeordnet.



Die Menge aller Pfeile einer Translation wird als Verschiebungsvektor oder kurz Vektor bezeichnet.

Länge eines Vektors:

Weitere wichtige Vektoren:

1) Gegenvektor

2) Einheitsvektor

3) Verbindungsvektor zweier Punkte

4) Ortsvektor

Aufgaben:

1) Bestimmen Sie zu P den Bildpunkt Q bei Verschiebung um den Vektor $\vec{a}$.

a) $P(0/-2) \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$

b) $P(-1/-1/0) \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$

2) Bestimmen Sie den Vektor $\vec{a}$, der den Punkt P in den Punkt Q verschiebt.

a) P(1/-2) Q(-1/-2)

b) P(1/-1/2) Q(-2/-2/5)

3) Bestimmen Sie zum Punkt Q und zum Vektor $\vec{a}$ den Urbildpunkt P.

a) $Q(0/-1) \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix}$

b) $Q(-3/1/-1) \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

4) Bestimmen Sie $a, b, c \in \mathbb{R}$ so, dass Q der Bildpunkt von P bei der Translation $\vec{a}$ ist.

a) $P(a/2/c) \quad Q(1/b/3) \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}c\\-2\\c\end{pmatrix}$

b) $P(a/2b/3) \quad Q(2b/1/c) \quad \vec{a}=\begin{pmatrix}2c\\2a\\1\end{pmatrix}$

Lösungen:

1a) Q(3/2) 1b) Q(0/1/1)

2a) $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ 2b) $\vec{a} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

3a) P(3/-3) 3b) P(-3/1/-2)

4a)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-a \\ b-2 \\ 3-c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c \\ -2 \\ c \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (I) \quad 1-a=c$

$(II) \quad b-2=-2 \quad \Rightarrow b=0$

$(III) \quad 3-c=c \quad \Rightarrow c=\frac{3}{2}$

$\Rightarrow 1-a=\frac{3}{2} \quad \Rightarrow a=-\frac{1}{2}$

4b)

$$\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 2b \\ 1 \\ c \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a \\ 2b \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2b-a \\ 1-2b \\ c-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2c \\ 2a \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow (I) \quad 2b-a=2c$

$(II) \quad 1-2b=2a \quad \Rightarrow 2b=1-2a$

$(III) \quad c-3=1 \quad \Rightarrow c=4$

$\Rightarrow 1-2a-a=2c \quad \Rightarrow 1-3a=8 \quad \Rightarrow a=-\frac{7}{3}$

$\Rightarrow 2b=1-2\cdot(-\frac{7}{3}) \quad \Rightarrow 2b=\frac{17}{3} \quad \Rightarrow b=\frac{17}{6}$

Addition von Vektoren:

Im $\mathbb{R}^2$: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}=$

Im $\mathbb{R}^3$: $\vec{a}+\vec{b}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}=$

Eigenschaften der Vektoraddition:

Für alle Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ der Ebene oder des Raumes gilt:

a) $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ Kommutativgesetz

b) $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ Assoziativgesetz

c) $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ (Neutrales Element)

d) $\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ (Inverses Element)

Subtraktion von Vektoren:

Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (S-Multiplikation):

Folgerung:

Eigenschaften der S-Multiplikation:

Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ der Ebene oder des Raumes und reelle Zahlen α, β gilt:

a) $\alpha \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \alpha \cdot \vec{a} + \alpha \cdot \vec{b}$ V(ektorielles) Distributivgesetz

b) $(\alpha + \beta) \cdot \vec{a} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{a}$ S(kalares) Distributivgesetz

c) $\alpha \cdot (\beta \cdot \vec{a}) = (\alpha \cdot \beta) \cdot \vec{a}$ Assoziativgesetz

d) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$ $(-1) \cdot \vec{a} = -\vec{a}$

e) $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$

Folgerung:

Anwendungen zum Rechnen mit Vektoren

(1) Gleichheit zweier Vektoren:

(2) Parallelität von Vektoren:

Aufgaben:

1) Gegeben sind die Punkte A(2/1/3), B(-1/3/-2) und C(0/1/-1).
Berechnen Sie die Vektoren

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$

b) $3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} + 2 \cdot \overrightarrow{CA}$

2) Prüfen Sie, ob die angegebenen Vektoren parallel sind.

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$

Lösungen:

1a)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$$

1b)

$$\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{CA} = -\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 3 \cdot \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} - 2 \cdot \overrightarrow{CA} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 6 \\ -15 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$$

2a)

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (I) \;\; 2 = \alpha \cdot 4 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$$(II) \;\; 3 = \alpha \cdot 6 \quad \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{\mathrm{b}}$ sind parallel

2b)

$$\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b} \quad \Rightarrow \begin{pmatrix} -8 \\ -6 \\ 4 \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (I) \;\; -8 = \alpha \cdot 4 \quad \Rightarrow \alpha = -2$$

$$(II) \;\; -6 = \alpha \cdot (-3) \quad \Rightarrow \alpha = 2$$

$$(III) \;\; 4 = \alpha \cdot (-2) \quad \Rightarrow \alpha = -2$$

$\Rightarrow \vec{a}$ und $\vec{\mathrm{b}}$ sind nicht parallel