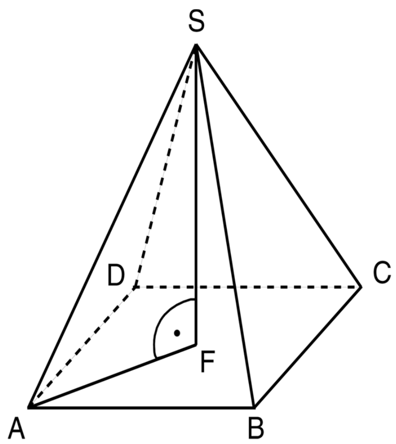
Die Pyramide

Bezeichnungen an der Pyramide:



$\overline{FS}$ ist die Höhe der Pyramide.

$\overline{SA}, \overline{SB}, \overline{SC}, \overline{SD}$ sind die Seitenkanten der Pyramide.

$\overline{AB}, \overline{BC}, \overline{CD}, \overline{DA}$ sind die Grundkanten der Pyramide.

$\sphericalangle FAS$ ist der Neigungswinkel der Seitenkante $\overline{AS}$ gegen die Grundfläche.

Für Pyramiden gilt:

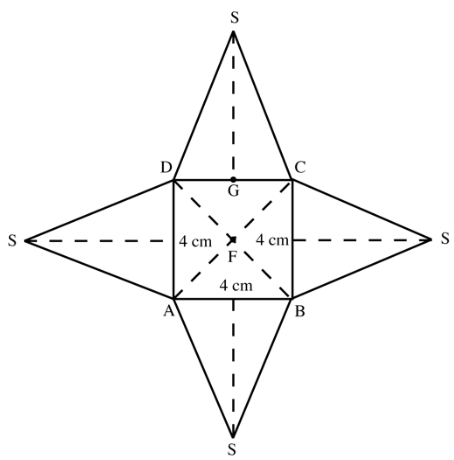
1. Sie werden von einem n-Eck als Grundfläche und n Dreiecken als Seitenflächen begrenzt.

2. Die Länge der Lotstrecke von der Spitze auf die Grundfläche heißt Höhe der Pyramide.

3. Die Mantelfläche ist die Vereinigungsmenge der Seitenflächen.
Die Oberfläche ergibt sich aus der Summe der Mantelfläche und der Grundfläche.

Beispiel:

Die Grundfläche der Pyramide ist ein Quadrat mit Seitenlänge 4 cm und die Höhe der Pyramide beträgt 5 cm.



Netz der Pyramide

Berechnung der Oberfläche der Pyramide:

Oberfläche = Grundfläche + Mantelfläche = $A_{\text{Quadrat}} + 4 \cdot A_{\text{Dreieck}}$

Flächeninhalt eines Dreiecks:

Betrachte $\triangle DCS$: $A = \frac{1}{2} \cdot \left|\overline{DC}\right| \cdot h_{DC}$

Berechnung von h_{DC}:

$\left|\overline{SG}\right|^2 = \left|\overline{FG}\right|^2 + \left|\overline{FS}\right|^2$ (Satz des Pythagoras)

$\left|\overline{SG}\right|^2 = (2\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2 = 29\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \left|\overline{SG}\right| = \sqrt{29}\text{cm} \ (\approx 5{,}39\text{cm})$

$\Rightarrow A_{\triangle DCS} \approx \frac{1}{2} \cdot 4\text{cm} \cdot 5{,}39\text{cm} \approx 10{,}78\text{cm}^2$

$\Rightarrow O \approx 4\text{cm} \cdot 4\text{cm} + 4 \cdot 10{,}78\text{cm}^2 \approx 16\text{cm}^2 + 43{,}12\text{cm}^2 \approx 59{,}12\text{cm}^2$

Berechnung des Neigungswinkels φ der Seitenkante AS gegen die Grundfläche:

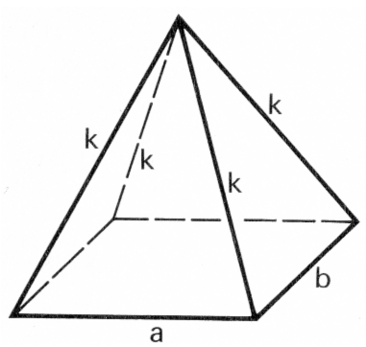
Betrachte $\triangle AFS$: $\sin\varphi = \frac{\left|\overline{FS}\right|}{\left|\overline{AS}\right|}$

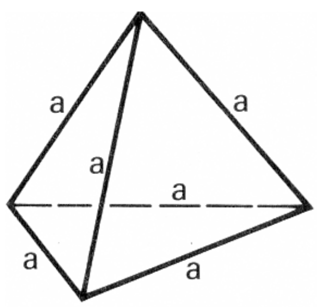
Berechnung von $\overline{AS}$:

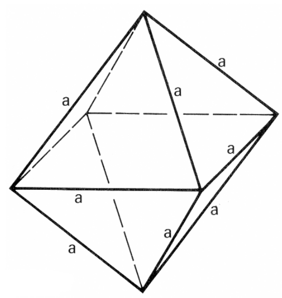
$\left|\overline{AS}\right|^2 \approx (2\text{cm})^2 + (5{,}39\text{cm})^2 = 4\text{cm}^2 + 29\text{cm}^2 = 33\text{cm}^2 \quad \Rightarrow \left|\overline{AS}\right| = \sqrt{33}\text{cm} \ (\approx 5{,}74\text{cm})$

$\Rightarrow \sin\varphi = \frac{5\text{cm}}{\sqrt{33}\text{cm}} \approx 0{,}87 \quad \Rightarrow \varphi \approx 60{,}58°$

Besondere Pyramiden







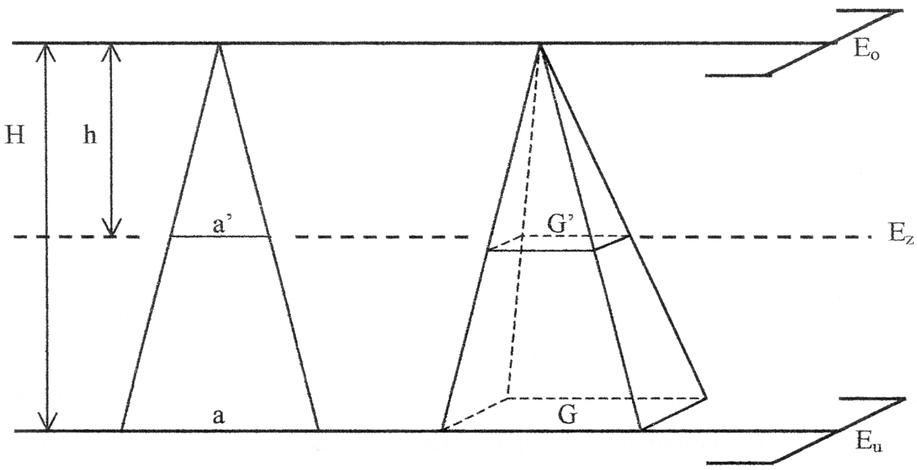
Gerade Pyramide:
Pyramide mit lauter gleich langen Seitenkanten

Reguläres Tetraeder:
Dreiseitige Pyramide mit lauter gleich langen Kanten

Reguläres Oktaeder:
Vierseitige Doppelpyramide mit lauter gleich langen Kanten

Der Rauminhalt einer Pyramide

Herleitung des Rauminhalts einer Pyramide:



Es gilt:

$$\frac{a'}{a}=\frac{h}{H} \qquad \frac{G'}{G}=\frac{h^2}{H^2} \Rightarrow G'=\frac{h^2}{H^2}\cdot G$$

Satz:

Die Flächen verhalten sich wie die Quadrate der zugehörigen Höhen.

Folgerung:

G´ hängt nur von G, h und H ab, egal wo sich die Spitze in der Ebene E_0 befindet.

Die Schnittfläche der Pyramide bleibt immer gleich.

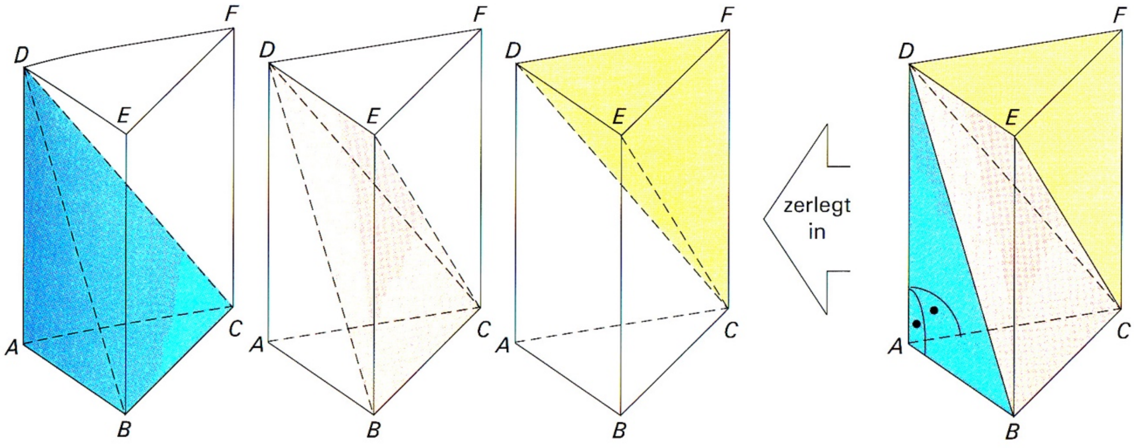
Satz des Cavalieri:

Werden zwei Körper, die auf der selben Ebene stehen, von allen dazu parallelen Ebenen jeweils in gleich großen Flächen geschnitten, so haben die Körper den gleichen Rauminhalt.

Folgerung:

Alle Pyramiden mit gleicher Grundfläche und Höhe haben den selben Rauminhalt.

Herleitung der Formel zur Bestimmung des Rauminhalts einer Pyramide:



Pyramide $ABCD$ Pyramide $BCED$ Pyramide $ECFD$ Prisma $ABCDEF$

Für den Rauminhalt einer Pyramide gilt also: $V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$

Aufgaben:

1 Eine Pyramide ABCDS hat ein Quadrat mit 7,2 cm Seitenlänge als Grundfläche und eine Höhe von 9,3 cm.
Berechnen Sie die Maßzahl für das Volumen der Pyramide.

2 Bei einer Pyramide mit rechteckiger Grundfläche verhalten sich die Längen der Seiten wie 3:2.
Bestimmen Sie, wie lang die Rechtecksseiten sind, wenn die Pyramide 7 cm hoch ist und ein Volumen von 224 cm^3 hat.

3 Berechnen Sie die Maßzahl des Volumens und der Oberfläche einer 8 cm hohen Pyramide, die als Grundfläche ein gleichseitiges Dreieck mit der Seitenlänge 5 cm hat.

Lösungen:

1

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \qquad G = 7{,}2 \cdot 7{,}2 = 51{,}84\ cm^2$$

$$\Rightarrow V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot 51{,}84 \cdot 9{,}3 = 160{,}70\ cm^3$$

2

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h \quad \Rightarrow G = \frac{3 \cdot V_{Pyramide}}{h} = \frac{3 \cdot 224}{7} = 96\ cm^2$$

Längen der Seiten der Grundfläche verhalten sich wie 3:2 $\Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{3}{2} \quad \Rightarrow a = \frac{3}{2} \cdot b$

$$\Rightarrow G = \frac{3}{2} \cdot b \cdot b = 96 \quad \Rightarrow b^2 = 64 \quad \Rightarrow b_1 = 8\ cm \quad (b_2 = -8)$$

$$\Rightarrow a = \frac{3}{2} \cdot 8 = 12\ cm$$

3

Berechnung der Maßzahl des Volumens der Pyramide:

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

$$G = A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$$\Rightarrow 5^2 = 2{,}5^2 + h^2 \quad \Rightarrow h^2 = 25 - 6{,}25 = 18{,}75 \quad \Rightarrow h_1 \approx 4{,}33\ cm \quad (h_2 \approx -4{,}33)$$

$$\Rightarrow A_{\Delta} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 4{,}33 = 10{,}83\ cm^2$$

$$\Rightarrow V = \frac{1}{3} \cdot 10{,}83 \cdot 8 = 28{,}88\ cm^3$$

Berechnung der Maßzahl der Oberfläche der Pyramide:

$$O = \text{Grundfläche} + \text{Mantelfläche}$$

Mantelfläche: $(\text{Seitenkante})^2 = (\frac{2}{3} \cdot h_{Grunddreieck})^2 + (h_{Pyramide})^2$

$$\Rightarrow s^2 = (\frac{2}{3} \cdot 4{,}33)^2 + 8^2 = 8{,}33 + 64 = 72{,}33$$

$$\Rightarrow s_1 \approx 8{,}5\ cm \quad (s_2 \approx -8{,}5)$$

Berechnung der Höhe eines Seitendreiecks:

$$s^2 = 2{,}5^2 + (h_{Seitendreieck})^2 \quad \Rightarrow (h_{Seitendreieck})^2 = 8{,}5^2 - 2{,}5^2 = 72{,}25 - 6{,}25 = 66$$

$$\Rightarrow h_1 \approx 8{,}12\ cm \quad (h_2 \approx -8{,}12)$$

$$\Rightarrow A_{Seitendreieck} = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 8{,}12 = 20{,}3\ cm^2$$

$$\Rightarrow \text{Mantelfläche} = 3 \cdot 20{,}3 = 60{,}9\ cm^2$$

$$\Rightarrow \text{Oberfläche} = 10{,}83 + 60{,}9 = 71{,}73\ cm^2$$