

Die Regeln von L'Hospital

Zur Berechnung von Grenzwerten unbestimmter Formen wie $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 \cdot \infty$ können die Regeln von L'Hospital verwendet werden.

Grenzwertregeln von L'Hospital:

Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen, für die

- $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow \infty} |f(x)| \rightarrow \infty$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} |g(x)| \rightarrow \infty$

ist.

Existiert der Grenzwert $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch der $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für Grenzwerte $x \rightarrow -\infty$ und $x \rightarrow x_0$.

Beispiele:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

$$2) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 0} (x \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0} (-x) = 0$$

Prioritätsregel für die Grenzwertbildung:

Die e-Funktion dominiert über jede Potenzfunktion und jede Potenzfunktion über jede ln-Funktion.

Aufgaben:

1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x}$

2) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^9 - x^2}$

3) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} \cdot e^{-x})$

4) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3}{3e^x}$

5) $\lim_{x \rightarrow \infty} [(3-x) \cdot e^{2x}]$

6) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x + 1}$

7) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x}$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x)$

9) $\lim_{x \rightarrow 0} [(x-1) \cdot \ln x]$

Lösungen:

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{1} = 0$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 2x + 1}{x^9 - x^2} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2}{9x^8 - 2x} = \frac{1}{7}$$

$$3) \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x} \cdot e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{e^x} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2\sqrt{x} \cdot e^x} = 0$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x^3}{3e^x} \text{ existiert nicht} \Rightarrow \frac{x^2 - x^3}{3e^x} \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow -\infty$$

$$5) \lim_{x \rightarrow \infty} [(3-x) \cdot e^{2x}] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3-x}{e^{-2x}} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-1}{-2e^{-2x}} = 0$$

$$6) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3}{e^x + 1} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{e^x} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x}{e^x} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6}{e^x} = 0$$

$$7) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} (x^2 \cdot \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x^2}} \stackrel{L'Hospital}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{x^2}{2}\right) = 0$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 0} [(x-1) \cdot \ln x] \text{ existiert nicht} \Rightarrow (x-1) \cdot \ln x \rightarrow \infty \text{ für } x \rightarrow 0$$