Die Regeln von L´Hospital

Zur Berechnung von Grenzwerten unbestimmter Formen wie $\frac{0}{0}$, $\frac{\infty}{\infty}$ oder $0 \cdot \infty$ können die Regeln von L´Hospital verwendet werden.

Grenzwertregeln von L`Hospital:

Seien f und g stetig differenzierbare Funktionen, für die

- $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x) = 0$
- $\lim\limits_{x \to \infty} |f(x)| \to \infty$ und $\lim\limits_{x \to \infty} |g(x)| \to \infty$

ist.

Existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, so existiert auch der $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ und es gilt:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Entsprechende Aussagen gelten auch für Grenzwerte $x \to -\infty$ und $x \to x_0$.

Beispiele:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} \overset{L`Hospital}{=} \lim\limits_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$

2) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{x}{e^x} \overset{L`Hospital}{=} \lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{e^x} = 0$

3) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x \cdot \ln x) = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{L`Hospital}{=} \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (-x) = 0$

Prioritätsregel für die Grenzwertbildung:

Die e-Funktion dominiert über jede Potenzfunktion und jede Potenzfunktion über jede ln-Funktion.

Aufgaben:

1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos x - 1}{x}$

2) $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^3 - 2x + 1}{x^9 - x^2}$

3) $\lim\limits_{x \to \infty} (\sqrt{x} \cdot e^{-x})$

4) $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x^2 - x^3}{3e^x}$

5) $\lim\limits_{x \to -\infty} [(3 - x) \cdot e^{2x}]$

6) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^3}{e^x + 1}$

7) $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\ln x}{x}$

8) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} (x^2 \cdot \ln x)$

9) $\lim\limits_{x \overset{>}{\to} 0} [(x - 1) \cdot \ln x]$

Lösungen:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x-1}{x}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{1}=0$

2) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-2x+1}{x^9-x^2}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{3x^2-2}{9x^8-2x}=\dfrac{1}{7}$

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x}\cdot e^{-x})=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sqrt{x}}{e^x}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{e^x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{2\sqrt{x}\cdot e^x}=0$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^2-x^3}{3e^x}$ existiert nicht $\Rightarrow \dfrac{x^2-x^3}{3e^x}\to\infty$ für $x\to-\infty$

5) $\lim\limits_{x\to-\infty}[(3-x)\cdot e^{2x}]=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3-x}{e^{-2x}}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-1}{-2e^{-2x}}=0$

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{e^x+1}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2}{e^x}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x}{e^x}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6}{e^x}=0$

7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{x}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\frac{1}{x}}{1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$

8) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(x^2\cdot\ln x)=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x^2}}\overset{L`Hospital}{=}\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}(-\dfrac{x^2}{2})=0$

9) $\lim\limits_{x\overset{>}{\to}0}[(x-1)\cdot\ln x]$ existiert nicht $\Rightarrow (x-1)\cdot\ln x\to\infty$ für $x\overset{>}{\to}0$