

Die binomischen Formeln

Beispiele:

$$1 \quad (a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2 \quad (a-b)^2 = (a-b)(a-b) = a^2 - ab - ba + b^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$3 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$$

Es gilt:

$$1 \quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$2 \quad (a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \quad \text{"Binomische Formeln"}$$

$$3 \quad (a+b)(a-b) = a^2 - b^2$$

Aufgaben:

$$1 \quad (5x+3y)^2$$

$$2 \quad (2z-4u)^2$$

$$3 \quad \left(7a + \frac{1}{3}b\right) \left(7a - \frac{1}{3}b\right)$$

$$4 \quad 44^2 = (40+4)^2$$

$$5 \quad 78^2 = (80-2)^2$$

$$6 \quad (16x^2 - 15y)(15y + 16x^2)$$

$$7 \quad (2a+3b) \cdot (u+4v)^2$$

$$8 \quad (3x+7y)^2$$

$$9 \quad (8u-3v)^2$$

$$10 \quad (2xy+8y^2)(2xy-8y^2)$$

$$11 \quad (u^3+1)(1-u^3)$$

$$12 \quad 5(6x+4y)^2$$

$$13 \quad (3b-5c)(2x+5y)^2$$

Lösungen zu den Aufgaben:

1 $(5x+3y)^2 = (5x)^2 + 2 \cdot 5x \cdot 3y + (3y)^2 = 25x^2 + 30xy + 9y^2$

2 $(2z-4u)^2 = (2z)^2 - 2 \cdot 2z \cdot 4u + (4u)^2 = 4z^2 - 16uz + 16u^2$

3 $\left(7a + \frac{1}{3}b\right)\left(7a - \frac{1}{3}b\right) = (7a)^2 - \left(\frac{1}{3}b\right)^2 = 49a^2 - \frac{1}{9}b^2$

4 $44^2 = (40+4)^2 = 40^2 + 2 \cdot 40 \cdot 4 + 4^2 = 1600 + 320 + 16 = 1936$

5 $78^2 = (80-2)^2 = 80^2 - 2 \cdot 80 \cdot 2 + 2^2 = 6400 - 320 + 4 = 6084$

6 $(16x^2 - 15y)(15y + 16x^2) = (16x^2 - 15y)(16x^2 + 15y) = 256x^4 - 225y^2$

7 $(2a+3b) \cdot (u+4v)^2 = (2a+3b) \cdot (u^2 + 8uv + 16v^2) =$
 $2au^2 + 16auv + 32av^2 + 3bu^2 + 24buv + 48bv^2$

8 $(3x+7y)^2 = 9x^2 + 42xy + 49y^2$

9 $(8u-3v)^2 = 64u^2 - 48uv + 9v^2$

10 $(2xy+8y^2)(2xy-8y^2) = 4x^2y^2 - 64y^4$

11 $(u^3+1)(1-u^3) = (1+u^3)(1-u^3) = 1-u^6$

12 $5(6x+4y)^2 = 5(36x^2 + 48xy + 16y^2) = 180x^2 + 240xy + 80y^2$

13 $(3b-5c)(2x+5y)^2 = (3b-5c)(4x^2 + 20xy + 25y^2) =$
 $12bx^2 + 60bxy + 75by^2 - 20cx^2 - 100cxy - 125cy^2$

Quadrate von mehrgliedrigen Summentermen

Beispiele:

$$1 \quad (a+b-c)^2 = (a+b-c)(a+b-c) = a^2 + ab - ac + ba + b^2 - bc - ca - cb + c^2 = \\ a^2 + b^2 + c^2 + 2ab - 2ac - 2bc$$

Ein mehrgliedriger Summenterm wird quadriert, indem man

- die Summe aller Quadrate bildet.
- die doppelten Produkte von je zwei Gliedern unter Berücksichtigung der Vorzeichen hinzufügt.

$$2 \quad (a-b-c+d)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 - 2ab - 2ac + 2ad + 2bc - 2bd - 2cd$$

$$3 \quad (u+v-w)^2 = u^2 + v^2 + w^2 + 2uv - 2uw - 2vw$$

$$4 \quad (c-d+e)^2 = c^2 + d^2 + e^2 - 2cd + 2ce - 2de$$

$$5 \quad (5a-8b-4c)^2 = 25a^2 + 64b^2 + 16c^2 - 80ab - 40ac + 64bc$$

Dritte Potenzen von Binomen

Beispiele:

$$1 \quad (a+b)^3 = (a+b)(a+b)^2 = (a+b)(a^2 + 2ab + b^2) = \\ a^3 + 2a^2b + ab^2 + ba^2 + 2ab^2 + b^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$2 \quad (a-b)^3 = (a-b)(a-b)^2 = (a-b)(a^2 - 2ab + b^2) = \\ a^3 - 2a^2b + ab^2 - ba^2 + 2ab^2 - b^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Es gilt:

- $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
- $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Aufgaben:

$$1 \quad (2u+3v)^3$$

$$2 \quad (4x-y)^3$$

$$3 \quad (2s+2t)^3 + (2s-2t)^3$$

$$4 \quad (p-q)^3 - (q-p)^3$$

$$5 \quad (2s-5t)^3$$

$$6 \quad (2x+1)^3$$

Lösungen zu den Aufgaben:

$$1 \quad (2u+3v)^3 = (2u)^3 + 3 \cdot (2u)^2 \cdot 3v + 3 \cdot 2u \cdot (3v)^2 + (3v)^3 = 8u^3 + 36u^2v + 54uv^2 + 27v^3$$

$$2 \quad (4x-y)^3 = (4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot y + 3 \cdot 4x \cdot y^2 - y^3 = 64x^3 - 48x^2y + 12xy^2 - y^3$$

$$3 \quad (2s+2t)^3 + (2s-2t)^3 = 8s^3 + 24s^2t + 24st^2 + 8t^3 + 8s^3 - 24s^2t + 24st^2 - 8t^3 = 16s^3 + 48st^2$$

$$4 \quad (p-q)^3 - (q-p)^3 = p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3 - (q^3 - 3q^2p + 3qp^2 - p^3) =$$
$$p^3 - 3p^2q + 3pq^2 - q^3 - q^3 + 3q^2p - 3qp^2 + p^3 = 2p^3 - 6p^2q + 6pq^2 - 2q^3$$

$$5 \quad (2s-5t)^3 = 8s^3 - 60s^2t + 150st^2 - 125t^3$$

$$6 \quad (2x+1)^3 = 8x^3 + 12x^2 + 6x + 1$$