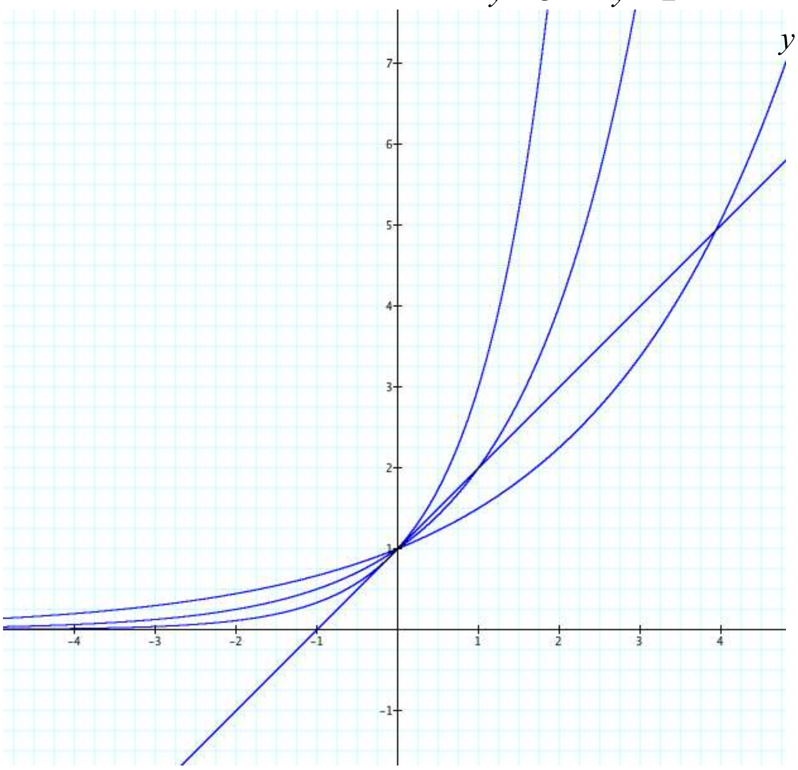
Die e-Funktion

Beispiel:
Gesucht ist diejenige Exponentialfunktion, dessen Tangente die y-Achse im Punkt S(0/1) unter 45° schneidet.



Vermutung: 2 < b < 3

Berechnung von b: Berechnung der Steigung von $f(x) = b^x$ im Punkt S(0/1)

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to 0} \frac{b^x - b^0}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{b^x - 1}{x} = 1$$

Für x nahe bei Null gilt also:

$$\frac{b^x - 1}{x} \approx 1 \quad \Rightarrow b^x \approx x + 1 \quad \Rightarrow b \approx (x+1)^{\frac{1}{x}}$$

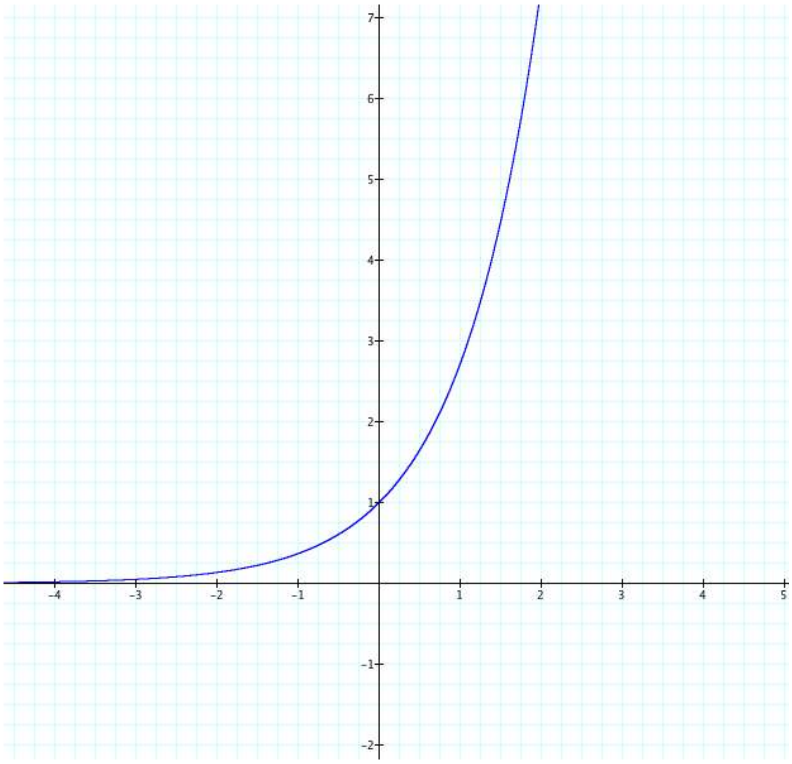
Setze $r = \frac{1}{x}$ $\Rightarrow b \approx (1 + \frac{1}{r})^r$

$\Rightarrow b = \lim_{r \to \infty} (1 + \frac{1}{r})^r$ ($x \to 0$ entspricht $r \to \infty$)

$\Rightarrow \lim_{r \to \infty} (1 + \frac{1}{r})^r =: e$ e ist die Eulersche Zahl ($\approx$ 2,71828...)

Die gesuchte Exponentialfunktion lautet also: $f(x) = e^x$

Graph der e-Funktion:



Eigenschaften der e-Funktion:

1) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$ Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}^+$

2) Nullstellen: keine

3) Monotonieverhalten: G_f ist streng monoton steigend

4) Grenzverhalten:

$\lim\limits_{x \to \infty}(e^x)$ existiert nicht $e^x \to \infty$ für $x \to \infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty}(e^x) = 0$

5) Ableitung:

$f(x) = e^x \qquad f'(x) = e^x$

Bemerkung: Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

$f(x) = a^x = \left(e^{\ln a}\right)^x = e^{x \cdot \ln a}$

$f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$

6) Stammfunktion: $\int e^x dx = e^x + C$