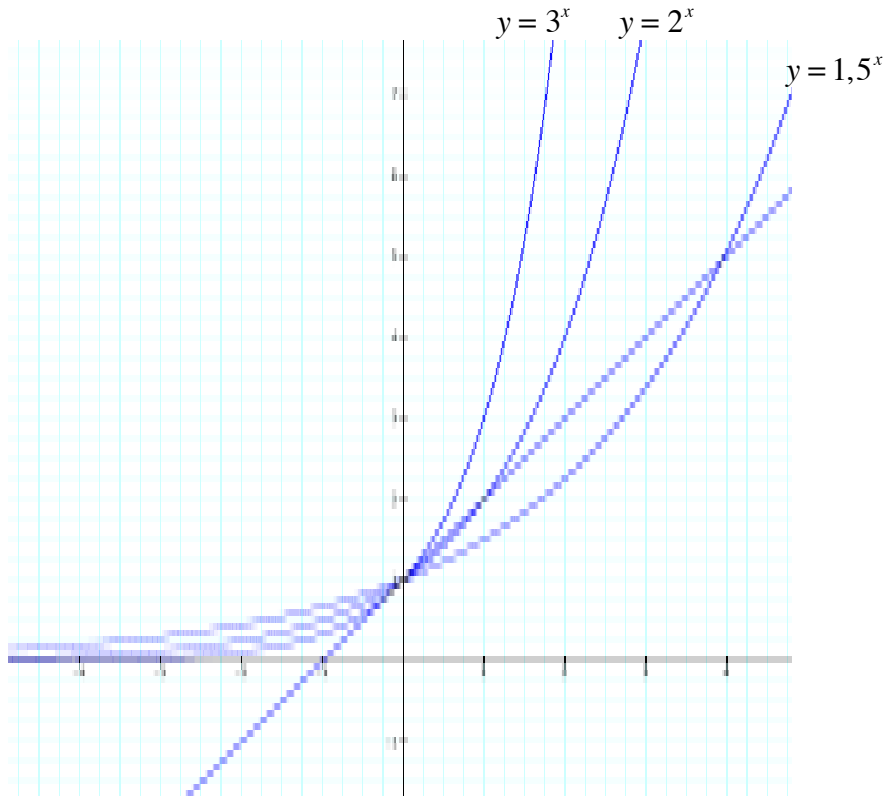


Die e-Funktion

Beispiel:

Gesucht ist diejenige Exponentialfunktion, dessen Tangente die y-Achse im Punkt S(0/1) unter 45° schneidet.



Vermutung: $2 < b < 3$

Berechnung von b: Berechnung der Steigung von $f(x) = b^x$ im Punkt S(0/1)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - b^0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{b^x - 1}{x} = 1$$

Für x nahe bei Null gilt also:

$$\frac{b^x - 1}{x} \approx 1 \Rightarrow b^x \approx x + 1 \Rightarrow b \approx (x + 1)^{\frac{1}{x}}$$

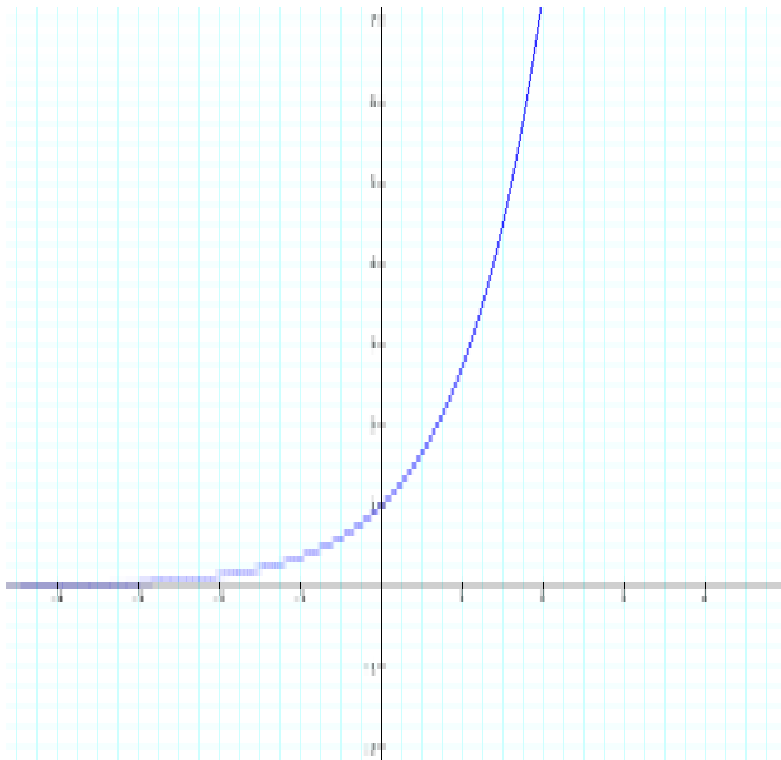
$$\text{Setze } r = \frac{1}{x} \Rightarrow b \approx \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r$$

$$\Rightarrow b = \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r \quad (x \rightarrow 0 \text{ entspricht } r \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow \lim_{r \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{r}\right)^r =: e \quad e \text{ ist die Eulersche Zahl } (\approx 2,71828\dots)$$

Die gesuchte Exponentialfunktion lautet also: $f(x) = e^x$

Graph der e-Funktion:



Eigenschaften der e-Funktion:

1) Definitionsmenge: $D_f = \mathbb{R}$ Wertemenge: $W_f = \mathbb{R}^+$

2) Nullstellen: keine

3) Monotonieverhalten: G_f ist streng monoton steigend

4) Grenzverhalten:

$\lim_{x \rightarrow \infty} (e^x)$ existiert nicht $e^x \rightarrow \infty$ für $x \rightarrow \infty$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^x) = 0$

5) Ableitung:

$$f(x) = e^x \quad f'(x) = e^x$$

Bemerkung: Ableitung der allgemeinen Exponentialfunktion

$$f(x) = a^x = (e^{\ln a})^x = e^{x \cdot \ln a}$$

$$f'(x) = e^{x \cdot \ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$$

6) Stammfunktion: $\int e^x dx = e^x + C$