Differenzierbarkeit von Funktionen

Nützliches Differenzierbarkeitskennzeichen:

Ist f an einer Stelle x_0 stetig und rechts und links davon differenzierbar und gilt

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ <}} f'(x) = \lim_{\substack{x \to x_0 \\ >}} f'(x) = a \text{ mit } a \in \mathbb{R},$$

so ist f an der Stelle x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) = a$.

Beispiele:

1) $f(x) = \begin{cases} x & \text{für } x < 0 \\ 1 - x & \text{für } x \geq 0 \end{cases}$

Stetigkeit:

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} (x) = 0$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (1 - x) = 0$

$\Rightarrow$ f ist nicht stetig bei x = 0

$\Rightarrow$ f ist nicht differenzierbar bei x = 0

2) $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2 & \text{für } x \leq -1 \\ 1 - x & \text{für } x > -1 \end{cases}$

Stetigkeit:

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (1 + x^2) = 2 \qquad \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (1 - x) = 2 \qquad f(-1) = 1 + (-1)^2 = 2$

$\Rightarrow$ f ist stetig bei x = -1

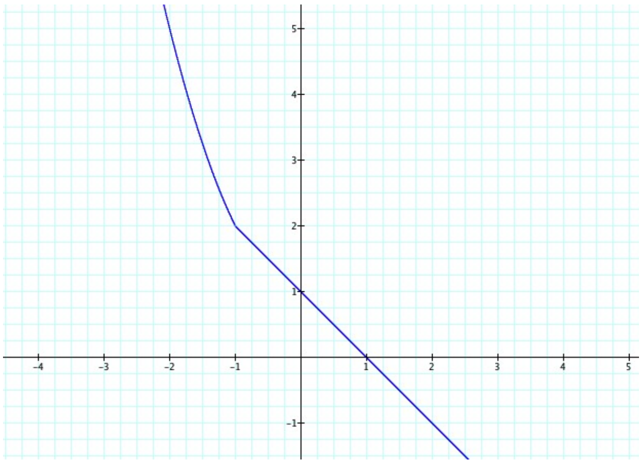
Differenzierbarkeit:

$f'(x) = \begin{cases} 2x & \text{für x < -1} \\ -1 & \text{für x > -1} \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ <}} (2x) = -2 \qquad \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to -1 \\ >}} (-1) = -1$

$\Rightarrow$ f ist nicht differenzierbar bei x = -1

Graph:



Nichtdifferenzierbarkeit macht sich im Graphen als „Knick“ bemerkbar.

3) $f(x)=\begin{cases} x^3 & \text{für } x\le 1 \\ 3x-2 & \text{für } x>1 \end{cases}$

Stetigkeit:

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(x^3)=1 \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(3x-2)=1 \qquad f(1)=1^3=1$

$\Rightarrow$ f ist stetig bei x = 1

Differenzierbarkeit:

$f'(x)=\begin{cases} 3x^2 & \text{für x} < 1 \\ 3 & \text{für x} > 1 \end{cases}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ <}}(3x^2)=3 \qquad \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}} f'(x)=\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ >}}(3)=3$

$\Rightarrow$ f ist differenzierbar bei x = 1

Eine an einer Stelle x_0 differenzierbare Funktion f ist dort auch stetig.

Folgerung:

Ist eine Funktion an einer Stelle x_0 nicht stetig, so ist sie dort auch nicht differenzierbar.

Weitere Aufgaben:

Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen an der Nahtstelle differenzierbar sind.

1) $$f(x) = \begin{cases} 2x^2 - 4x & \mathit{für} \quad x \leq 2 \\ 4 & \mathit{für} \quad x > 2 \end{cases}$$

2) $$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 4x - 8) & \mathit{für} \quad x \leq 0 \\ 2x + 2 & \mathit{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

3) $$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20) & \mathit{für} \quad x < -1 \\ \frac{4}{9}(x^2 - 4x + 4) & \mathit{für} \quad x \geq -1 \end{cases}$$ (Abitur 2011 AI)

Lösungen:

1)

Stetigkeit:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ <}} (2x^2 - 4x) = 0$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 2 \\ >}} (4) = 4$

$\Rightarrow$ f ist bei x=2 nicht stetig

$\Rightarrow$ f ist bei x=2 nicht differenzierbar

2)

Stetigkeit:

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} [-\frac{1}{4}(x^3 + 2x^2 - 4x - 8)] = 2$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2x + 2) = 2$
- $f(0) = -\frac{1}{4}(0^3 + 2 \cdot 0^2 - 4 \cdot 0 - 8) = 2$

$\Rightarrow$ f ist bei x = 0 stetig

Differenzierbarkeit:

$$f'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{4}(3x^2 + 4x - 4) & \text{für} \quad x < 0 \\ 2 & \text{für} \quad x > 0 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ <}} [-\frac{1}{4}(3x^2 + 4x - 4)] = 1$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} f'(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ >}} (2) = 2$

$\Rightarrow$ f ist bei x = 0 nicht differenzierbar

3)

Stetigkeit:

- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} [\frac{1}{9}(x^3 + x^2 - 16x + 20)] = 4$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} h(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} \left[\frac{4}{9}\left(x^2 - 4x + 4\right)\right] = 4$
- $h(-1) = \frac{4}{9}\left((-1)^2 - 4\cdot(-1) + 4\right) = 4$

$\Rightarrow$ *h* ist bei x = -1 stetig

Differenzierbarkeit:

$$h'(x) = \begin{cases} \frac{1}{9}(3x^2 + 2x - 16) & \textit{für} \quad x < -1 \\ \\ \frac{4}{9}(2x - 4) & \textit{für} \quad x > -1 \end{cases}$$

- $\lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} h'(x) = \lim\limits_{\substack{< \\ x\to -1}} [\frac{1}{9}(3x^2 + 2x - 16)] = -\frac{5}{3}$
- $\lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} h'(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x\to -1}} \left[\frac{4}{9}(2x - 4)\right] = -\frac{8}{3}$

$\Rightarrow$ *h* ist bei x = -1 nicht differenzierbar