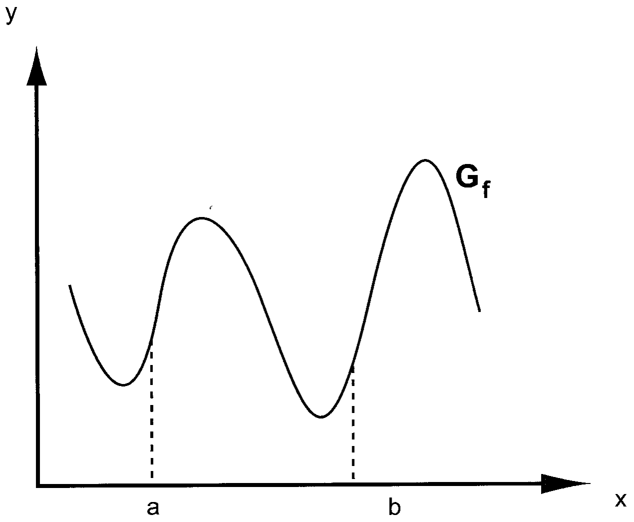
Eigenschaften stetiger Funktionen

1) Extremwertsatz:

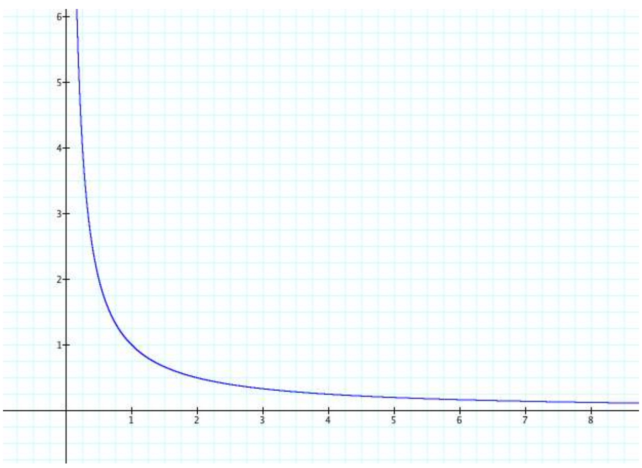


Extremwertsatz:
Ist f eine in einem abgeschlossenen Intervall [a;b] stetige Funktion, dann gibt es Zahlen $x_1 \in [a;b]$ und $x_2 \in [a;b]$, so dass $f(x_1)$ das Maximum und $f(x_2)$ das Minimum der Menge aller Funktionswerte f(x) mit $x \in [a;b]$ ist.

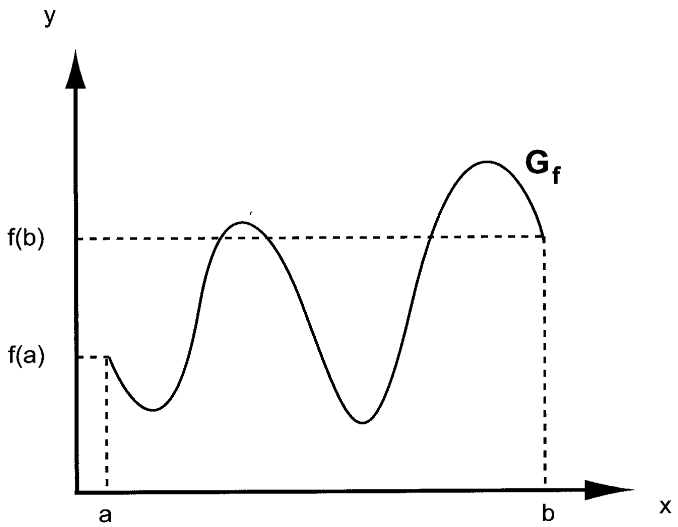
Gegenbeispiel:

Ist eine Funktion auf einem offenen Intervall stetig, so muss sie dort kein Maximum oder Minimum besitzen.

$f(x) = \frac{1}{x} \quad D_f =]0;\infty[$



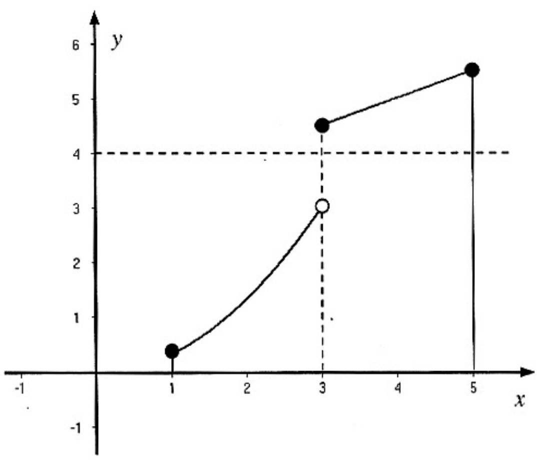
2) Zwischenwertsatz:



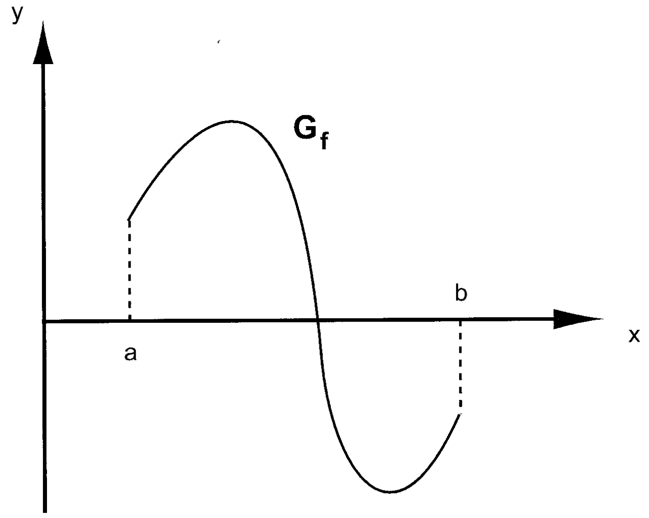
Zwischenwertsatz:
Ist f eine in einem Intervall [a;b] stetige Funktion, so gibt es zu jedem zwischen f(a) und f(b) liegenden Funktionswert y_0 mindestens eine Stelle $x_0 \in [a;b]$, so dass $f(x_0) = y_0$ gilt.

Gegenbeispiel:

Die folgende Funktion ist nicht stetig im Intervall [1;5] und damit trifft die Aussage des Zwischenwertsatzes nicht zu, denn die Zahl 4 ist kein Funktionswert der dargestellten Funktion.

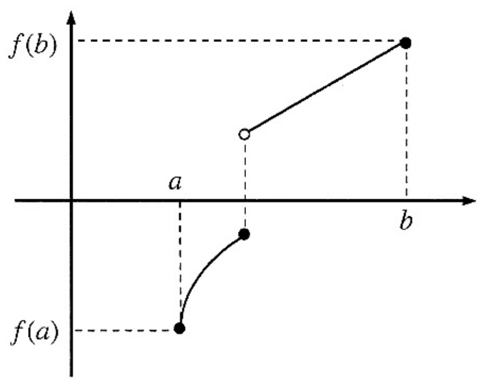


3) Sonderfall des Zwischenwertsatzes: Nullstellensatz

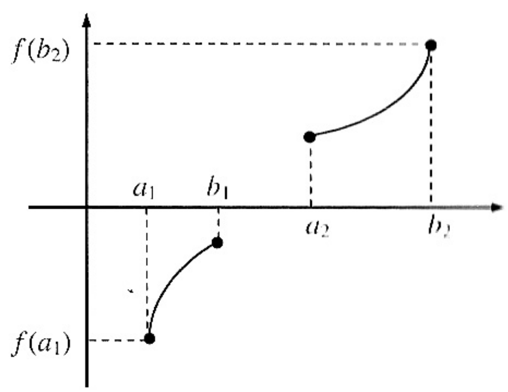


Nullstellensatz:
Ist f eine in einem Intervall [a;b] stetige Funktion, wobei die Funktionswerte f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen haben, so gibt es mindestens eine Stelle $x_0 \in [a;b]$, so dass $f(x_0) = 0$ gilt.

Gegenbeispiele:



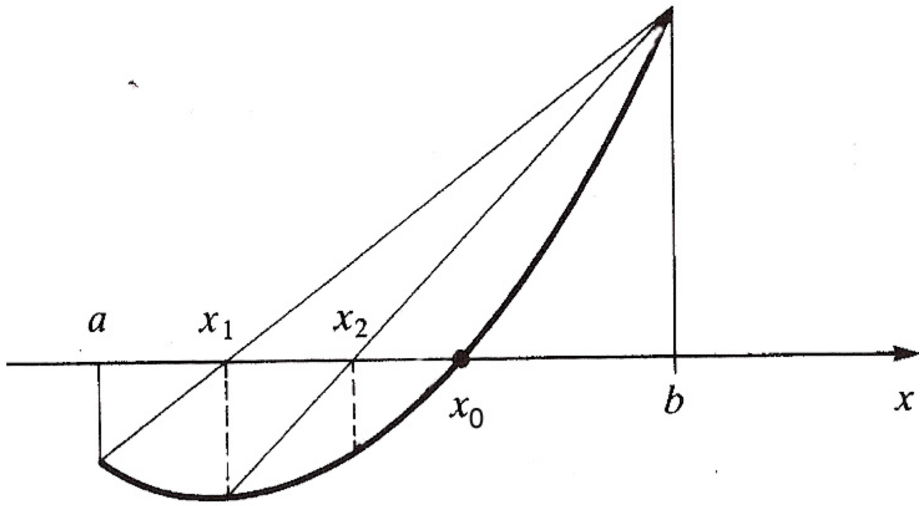
Die Funktion f ist nicht stetig im Intervall [a;b]. Obwohl f(a) und f(b) verschiedene Vorzeichen haben, besitzt f keine Nullstelle in]a;b[.



Die Funktion f ist stetig in der Definitionsmenge $D = [a_1; b_1] \cup [a_2; b_2]$ und die Funktionswerte $f(a_1)$ und $f(b_2)$ besitzen unterschiedliche Vorzeichen. Dennoch besitzt f keine Nullstelle in D, weil D kein abgeschlossenes Intervall ist.

Näherungsverfahren zur Bestimmung von Nullstellen

1) Regula falsi („Sehnenverfahren“):



x_1 kann mit Hilfe der folgenden Formel berechnet werden:

$$x_1 = a - f(a) \cdot \frac{b-a}{f(b)-f(a)}$$

2) Intervallhalbierungsverfahren („Bisektionsverfahren“):

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 + x - 1$.
Zeigen Sie, dass die Funktion f im Intervall [0;1] mindestens eine Nullstelle hat und berechnen Sie näherungsweise die Nullstelle der Funktion f.

$f(0) = -1 < 0 \qquad f(1) = 1 > 0$

$\Rightarrow$ da f stetig ist, hat die Funktion f nach Nullstellensatz im Intervall [0;1] mindestens eine Nullstelle

Lösungsverfahren zur näherungsweisen Bestimmung der Nullstelle:

Die Nullstelle liegt im Intervall I = [a;b]. Der Mittelwert m_1 teilt das Intervall I in zwei Teilintervalle $I = [a; m_1] \cup [m_1; b]$ mit $m_1 = \frac{a+b}{2}$.
Durch Untersuchung des Vorzeichens der Funktionswerte f(x) an der Stelle m_1 lässt sich feststellen, in welchem der beiden Teilintervalle die gesuchte Nullstelle x_0 liegt:

Ist $f(m_1) < 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \in [m_1; b]$

Ist $f(m_1) > 0 \quad \Rightarrow \quad x_0 \in [a; m_1]$

Anwendung auf das obige Beispiel:

i	I_i = [a;b]	m_i	$f(m_i)$	Teilintervalle
1	[0;1]	0,5	-0,375	$[0; 0,5] \cup [0,5; 1]$
2	[0,5;1]	0,75	0,171875	$[0,5; 0,75] \cup [0,75; 1]$
3	[0,5;0,75]	0,625	-0,130859375	$[0,5; 0,625] \cup [0,625; 0,75]$
4	[0,625;0,75]	0,6875	0,012451171	$[0,625; 0,6875] \cup [0,6875; 0,75]$
5	[0,625;0,6875]	0,65625	-0,061126708	$[0,625; 0,65625] \cup [0,65625; 0,6875]$

$\Rightarrow$ ein Näherungswert für die gesuchte Nullstelle ist: $x \approx 0,65625$