Einführung Grenzwert von Funktionen

1) Funktionen mit Grenzwert im Unendlichen

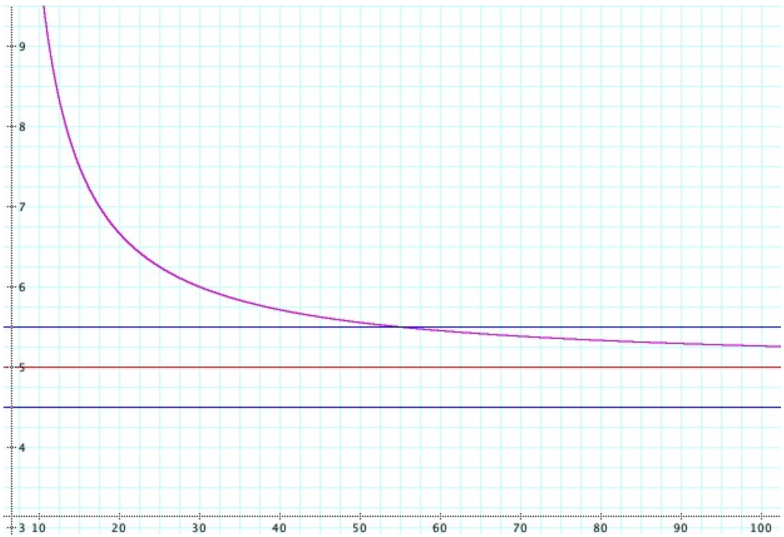
Beispiel:
Bei einer Sammellinse kann der Zusammenhang der Bildweite y und der Gegenstandsweite x bei gegebener Brennweite f = 5 cm mit Hilfe der Funktion $f(x)=\dfrac{5x}{x-5}$ beschrieben werden ($D_f =]5;\infty[$).
Rückt man den Gegenstand immer weiter von der Linse weg, so rückt das Bild immer näher an die Linse heran.
Bestimmen Sie die Lage des Bildes, wenn man den Gegenstand beliebig weit weg (ins Unendliche) schiebt.

Wertetabelle:

x	7	10	100	1000	10000
f(x)	17,5	10	5,26	5,025	5,0025

Vermutung: Die Funktionswerte streben für $x \to \infty$ gegen den Wert 5.

Veranschaulichung des Grenzverhaltens der Funktion f für $x \to \infty$:



Der Abstand der Funktionswerte f(x) zur Zahl g (hier: g = 5) wird für große x-Werte immer kleiner, d.h. mathematisch formuliert: für jeden noch so kleinen ε-Streifen um den Grenzwert g = 5 gibt es eine Zahl S, so dass für x > S die zugehörigen Funktionswerte in diesem ε-Streifen liegen.

Definition des Grenzwertes einer Funktion für $x \to \pm\infty$:

Eine Funktion mit rechtsseitig (linksseitig) unbeschränktem Definitionsbereich hat für $x \to \infty$ ($x \to -\infty$) den Grenzwert g, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zahl S gibt, so dass gilt: $|f(x) - g| < \varepsilon$ für alle x > S

Schreibweise:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = g \qquad \lim_{x \to -\infty} f(x) = g$$

In unserem Beispiel:

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\frac{5x}{x-5} \right) = 5$$

Berechnung der Stelle S zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ in unserem Beispiel:

$$\left| \frac{5x}{x-5} - 5 \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \left| \frac{5x}{x-5} - \frac{5(x-5)}{x-5} \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \left| \frac{5x - 5(x-5)}{x-5} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \left| \frac{5x - 5x + 25)}{x-5} \right| < \varepsilon \quad \Rightarrow \left| \frac{25}{x-5} \right| < \varepsilon$$

$\Rightarrow \dfrac{25}{x-5} < \varepsilon$ (da $\dfrac{25}{\text{x-5}}$ positiv ist, weil x $\to +\infty$ geht)

$$\Rightarrow 25 < \varepsilon(x-5) \quad \Rightarrow \frac{25}{\varepsilon} < x - 5 \quad \Rightarrow x > \frac{25}{\varepsilon} + 5 \quad \Rightarrow S = \frac{25}{\varepsilon} + 5$$

z.B. $\varepsilon = \dfrac{1}{100} \quad \Rightarrow S = 2505 \qquad \varepsilon = \dfrac{1}{1000} \quad \Rightarrow S = 25005$

Weitere Beispiele:

1) $f(x)=\frac{1}{x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}|\{0\}$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0 \qquad \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{x}\right)=0$$

2) $f(x)=k$ $\qquad k\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to+\infty}(k)=k \qquad \lim_{x\to-\infty}(k)=k$$

3) $f(x)=\frac{2x+6}{x+1}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}|\{-1\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x+6}{x+1}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(2+\frac{6}{x})}{x(1+\frac{1}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2+\frac{6}{x}}{1+\frac{1}{x}}=2$$

Bestimmen Sie S so, dass der Abstand des Funktionsgraphen zur Asymptote kleiner als $\frac{1}{10}$ ist.

$$\left|\frac{2x+6}{x+1}-2\right|<\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\left|\frac{2x+6}{x+1}-\frac{2(x+1)}{x+1}\right|<\frac{1}{10} \quad\Rightarrow\left|\frac{4}{x+1}\right|<\frac{1}{10}$$

1. Fall: x $\to +\infty$ $\quad \frac{4}{x+1}<\frac{1}{10} \quad\Rightarrow 40<x+1 \quad\Rightarrow x>39$

2. Fall: x $\to -\infty$ $\quad -\frac{4}{x+1}<\frac{1}{10} \quad\Rightarrow -40>x+1$ (da x+1 negativ ist) $\Rightarrow x<-41$

4) $f(x)=\frac{3x^2+4x-7}{x^2}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}|\{0\}$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{3x^2+4x-7}{x^2}\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^2(3+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2})}{x^2}=\lim_{x\to\pm\infty}(3+\frac{4}{x}-\frac{7}{x^2})=3$$

2) Funktionen ohne Grenzwert im Unendlichen

Beispiele:

1) $f(x) = x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x)$ existiert nicht $\quad f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (x)$ existiert nicht $\quad f(x) \to -\infty$ für $x \to -\infty$

2) $f(x) = \sqrt{x}$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (\sqrt{x})$ existiert nicht $\quad f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (\sqrt{x})$ existiert nicht (da x nicht negativ sein darf)

3) $f(x) = -3x^3 + 2x - 7$

$\lim\limits_{x \to +\infty} (-3x^3 + 2x - 7) = \lim\limits_{x \to +\infty} [x^3(-3 + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^3})$ existiert nicht

$f(x) \to -\infty$ für $x \to +\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} (-3x^3 + 2x - 7) = \lim\limits_{x \to -\infty} [x^3(-3 + \frac{2}{x^2} - \frac{7}{x^3})$ existiert nicht

$f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$

4) $f(x) = \dfrac{x^3 + 3}{x + 1} \qquad D_f = \mathbb{R}_0^+$

$$\lim_{x \to +\infty} (\frac{x^3 + 3}{x + 1}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x(x^2 + \frac{3}{x})}{x(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \text{ existiert nicht}$$

$f(x) \to +\infty$ für $x \to +\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} (\frac{x^3 + 3}{x + 1}) = \lim_{x \to -\infty} \frac{x(x^2 + \frac{3}{x})}{x(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \text{ existiert nicht}$$

$f(x) \to +\infty$ für $x \to -\infty$

Rechenregeln:

Für zwei Funktionen f und g gilt:

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)\pm g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)) \pm \lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x))$

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x)) \cdot \lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x))$

3) $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(f(x))}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x))}$ für $\lim\limits_{x\to\pm\infty}(g(x)) \neq 0$

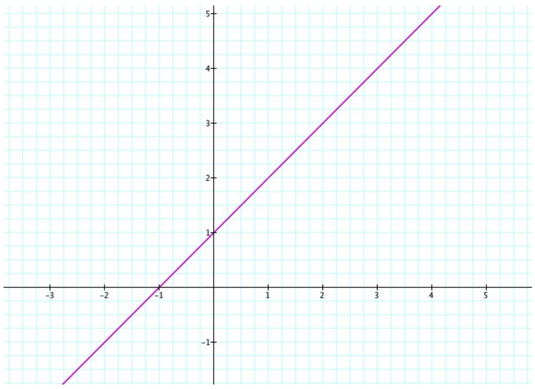
3) Das Verhalten von Funktionen an einer Stelle x_0

Beispiel: $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1 \qquad D_f = \mathbb{R} | \{1\}$

Verhalten links von x = 1: $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to 1}} (x+1) = 2_-$

Verhalten rechts von x = 1: $\lim\limits_{\substack{> \\ x \to 1}} (x+1) = 2_+$

Graph:



Definition:

Eine Funktion f, die beiderseits einer Stelle x_0 definiert ist, hat für $x \to x_0$ den Grenzwert g, wenn der rechtsseitige und linksseitige Grenzwert existieren und übereinstimmen, d.h. $\lim\limits_{\substack{< \\ x \to x_0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{> \\ x \to x_0}} f(x) = g$

Schreibweise:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = g$$

Aufgaben:

1) $f(x)=\dfrac{2x^2+x}{x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\big|\{0\}$

$f(x)=\dfrac{x(2x+1)}{x}=2x+1$

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}}(2x+1)=1_-$ $\qquad \lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}(2x+1)=1_+$

2) $f(x)=\dfrac{1}{x}$ $\qquad D_f=\mathbb{R}\big|\{0\}$

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to 0}}(\dfrac{1}{x})$ existiert nicht $\quad\Rightarrow f(x)\to-\infty$ für $x\overset{<}{\to}0$

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}(\dfrac{1}{x})$ existiert nicht $\quad\Rightarrow f(x)\to+\infty$ für $x\overset{>}{\to}0$

3) $f(x)=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}$

Bestimmung des maximalen Definitionsbereichs:

$x^2+x-6=0 \quad\Rightarrow (x+3)(x-2)=0 \quad\Rightarrow x_1=-3 \quad x_2=2 \quad\Rightarrow D_f=\mathbb{R}\big|\{-3;2\}$

Untersuchung des Grenzwertes bei Annäherung an die Definitionslücken:

$f(x)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{(x+3)(x-2)}=\dfrac{x+1}{x+3}$

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to -3}}(\dfrac{x-1}{x+3})$ existiert nicht $\quad\Rightarrow f(x)\to+\infty$ für $x\overset{<}{\to}-3$

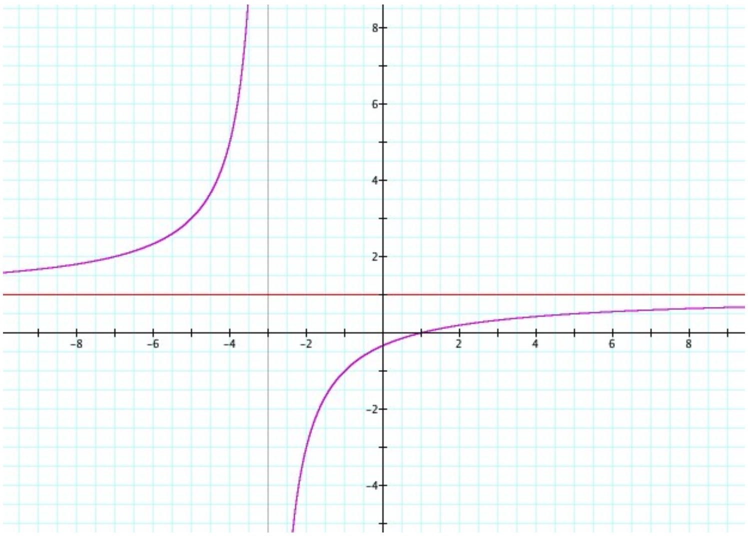
$\lim\limits_{\substack{>\\x\to -3}}(\dfrac{x-1}{x+3})$ existiert nicht $\quad\Rightarrow f(x)\to-\infty$ für $x\overset{>}{\to}-3$

$\lim\limits_{\substack{<\\x\to 2}}(\dfrac{x-1}{x+3})=\dfrac{1}{5}$ $\qquad \lim\limits_{\substack{>\\x\to 2}}(\dfrac{x-1}{x+3})=\dfrac{1}{5}$

Zusatz:

$$\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x-1}{x+3})=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x(1-\frac{1}{x})}{x(1+\frac{3}{x})}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{1-\frac{1}{x}}{1+\frac{3}{x}}=1$$

Graph:



Rechenregeln:

Für zwei Funktionen f und g gilt:

1) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0}(f(x)) \pm \lim\limits_{x \to x_0}(g(x))$

2) $\lim\limits_{x \to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to x_0}(f(x)) \cdot \lim\limits_{x \to x_0}(g(x))$

3) $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to x_0}(f(x))}{\lim\limits_{x \to x_0}(g(x))}$ für $\lim\limits_{x \to x_0}(g(x)) \neq 0$