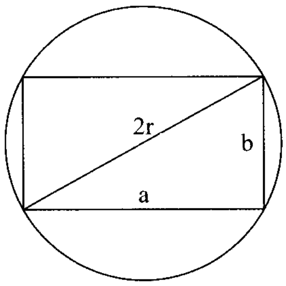
Extremwertaufgaben

1. Aus einem Draht der Länge $l = 72$ cm soll ein Kantenmodell eines Quaders hergestellt werden, der eine quadratische Grundfläche und ein möglichst großes Volumen haben soll.
   Bestimmen Sie die Länge der Kanten des Quaders.

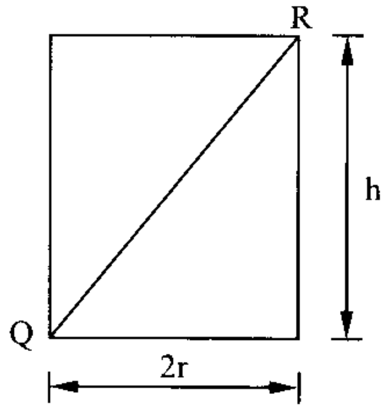
2. Aus einem rechteckigen Kartonblatt mit den Seiten 32 cm und 20 cm sollen an den Ecken kongruente Quadrate herausgeschnitten werden.
   Durch Aufklappen der entstehenden Rechtecke soll eine oben offene Schachtel mit maximalem Volumen entstehen.
   Berechnen Sie die Seite der herausgeschnittenen Quadrate und den Maximalwert des Volumens.

3. Aus einer kreisförmigen Rasenfläche mit dem Radius $r = 5$ LE soll für ein Blumenbeet eine rechteckige Fläche mit den Seiten a und b so ausgestochen werden, dass dieses Rechteck dem Kreis einbeschrieben ist (siehe Skizze).



   Die von a abhängige Maßzahl des Flächeninhalts des Rechtecks wird mit A(a) bezeichnet. Berechnen Sie, wie lang die Seite a sein muss, damit die Größe $g(a) = (A(a))^2$ (und damit auch A(a)) den absolut größten Wert annimmt und ermitteln Sie auch die absolut größte Flächenmaßzahl. Interpretieren Sie das Ergebnis geometrisch.
   (Teilergebnis: $g(a) = 100a^2 - a^4$) (Abitur NT 1999 A II)

4.0 Bei zylinderförmigen Behältern mit Höhe h und Radius r (Seitenansicht siehe nebenstehende Skizze) ist $\overline{QR} = 12\ dm$ konstant. (Einheiten bleiben unberücksichtigt.)



4.1 Stellen Sie die Maßzahl des Volumens V(h) des Behälters in Abhängigkeit von der Höhe h dar und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge D_V der zugehörigen Funktion V an.

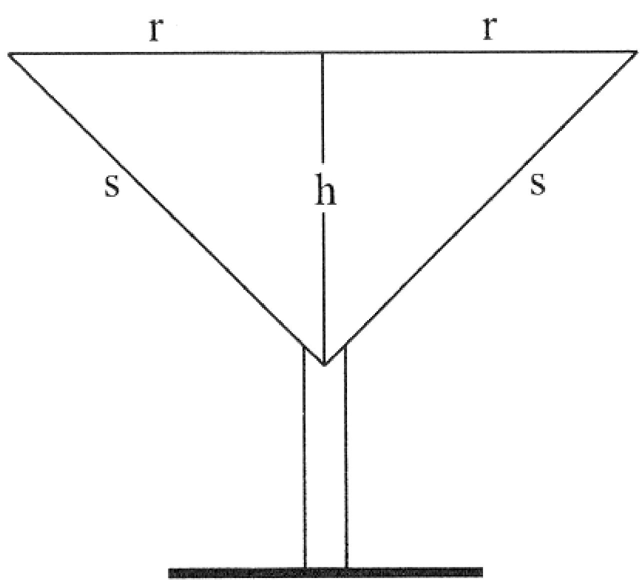
(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi \cdot (-\frac{h^3}{4} + 36h)$)

4.2 Bestimmen Sie h ($h \in D_V$) so, dass das Volumen den absolut größten Wert annimmt. Bestimmen Sie für diesen Fall auch den Radius r des Behälters sowie das maximale Volumen V_{max} (Abitur NT 2002 A II).

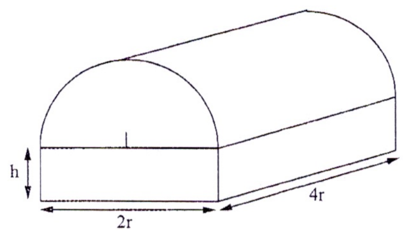
5. Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze des Achsenschnittes; die Dicke der Glaswand werde vernachlässigt). Die Längenmaßzahl der Mantellinie s des Kegels beträgt 12. Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(h) des Kegels in Abhängigkeit von der Kegelhöhe h dar und geben Sie die Definitionsmenge D_V der Funktion $V: h \to V(h)$ an.

Weisen Sie nach, dass die Volumenmaßzahl V(h) für $h_1 = 4\sqrt{3}$ ihren absoluten größten Wert annimmt. Zeigen Sie außerdem, dass in diesem Fall die Längenmaßzahlen von Radius r_1 und Höhe h_1 des Kegels im Verhältnis $\sqrt{2} : 1$ stehen (Abitur NT 2000 AI).

(Mögliches Teilergebnis: $V(h) = \pi\left(-\frac{h^3}{3} + 48h\right)$)



6.0 Ein Gewächshaus soll in Form eines Quaders mit aufgesetztem Halbzylinder aufgebaut werden und einen vorgegebenen Rauminhalt V haben. Der Radius des Halbzylinders wird mit r bezeichnet, die Grundfläche ist ein Rechteck mit Breite 2r und der Länge 4r (siehe Skizze). Die von r abhängige Maßzahl der gesamten Außenfläche wird mit A(r) bezeichnet (Abitur T 2002 AII).

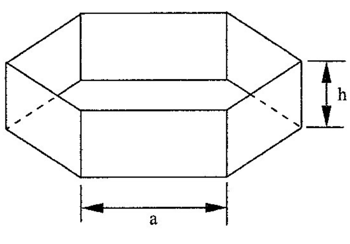


6.1 Zeigen Sie, dass bei vorgegebenem Volumen V gilt:

$$A(r) = \frac{3V}{2r} + 2 \cdot \pi \cdot r^2$$

6.2 Für das Gewächshaus steht ein Heizgerät für ein Volumen mit der Maßzahl 300 zur Verfügung. Berechnen Sie den Radius r, für den das geplante Gewächshaus mit diesem Volumen die absolut kleinste Außenfläche besitzt.

7.0 Eine Firma stellt Pflanztröge aus Holz her. Diese haben die Form eines oben offenen geraden Prismas, dessen Grundfläche ein regelmäßiges Sechseck mit der Seitenlänge a in cm ist (siehe Skizze). Das Volumen eines solchen Trogs beträgt 100 Liter. Die gesamte Innenfläche soll mit einer wasserdichten Folie bezogen werden (Abitur T 2003 AI).



7.1 Zeigen Sie, dass für den von a abhängigen Flächeninhalt A(a) dieser Folie gilt:

$$A(a) = \frac{3}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a^2 + \frac{400000}{\sqrt{3} \cdot a}$$

7.2 Berechnen Sie a so, dass die Folie des Troges die minimale Fläche hat. Runden Sie ihr Ergebnis auf eine Nachkommastelle.

8.0 Die Abmessungen einer oben offenen zylinderförmigen Tonne sollen so gewählt werden, dass bei festem Volumen V der Tonne der Materialverbrauch möglichst gering wird. Die Dicke des Materials ist vorgegeben und wird bei der Rechnung nicht berücksichtigt. Der Radius der kreisförmigen Grundfläche wird mit r, die Höhe der Tonne mit h bezeichnet. (Abitur 2004 AII)

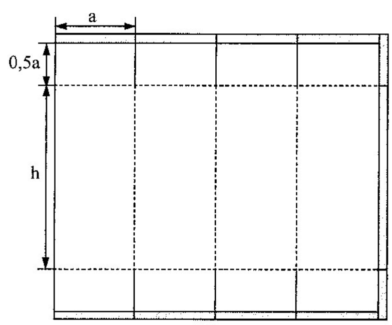
8.1 Ermitteln Sie die Formel für die äußere Oberfläche O in Abhängigkeit vom Radius r und geben Sie eine sinnvolle Definitionsmenge von O(r) an.

(Teillösung: $O(r) = r^2\pi + \frac{2V}{r}$)

8.2 Bestimmen Sie den Radius r_0 so, dass die Oberfläche $O(r_0)$ ein absolutes Minimum annimmt.

8.3 Berechnen Sie auf Millimeter gerundet die Abmessungen der Tonne mit minimalem Materialverbrauch, deren Volumen 100 Liter beträgt.

9.0 Häufig werden Getränke in quaderförmige Behälter abgefüllt, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist und deren Höhe mit h bezeichnet wird. Ein solcher Behälter wird aus einem rechteckigen Stück Karton, wie es nebenstehend skizziert ist, hergestellt. Zunächst wird dazu ein an beiden Enden offener Quader gefaltet. Dann werden aus den überstehenden Stücken der Boden und das Oberteil gefalzt. Aus Stabilitätsgründen werden durch den grau dargestellten Streifen der Breite 1,0 cm Überlappungen erzeugt.
Es soll ein Behälter mit dem Volumen V = 1000 cm³ hergestellt werden, für den der Materialverbrauch, d.h. der Flächeninhalt des skizzierten Kartons, minimal ist. Die Größen a und h sollen dabei die Einheit cm haben; bei den folgenden Berechnungen soll auf die Mitführung der Einheiten jedoch verzichtet werden. (Abitur 2005 AI)

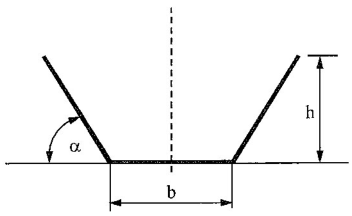


9.1 Zeigen Sie, dass für den in Abhängigkeit von a dargestellten Flächeninhalt F(a) des skizzierten Kartons gilt: $F(a) = 4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2}$ mit $a \in \mathbb{R} \wedge a > 0$.

9.2 Zeigen Sie, dass der Ansatz $\frac{dF(a)}{da} = 0$ zu folgender Gleichung führt:
$8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0$

9.3 Zeigen Sie unter der Annahme, dass es keine weitere positive Lösung dieser Gleichung gibt (Nachweis nicht erforderlich), dass für $a \approx 7{,}75$ der Flächeninhalt F(a) seinen absolut kleinsten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Höhe h des Behälters sowie die Abmessungen des skizzierten Kartons.

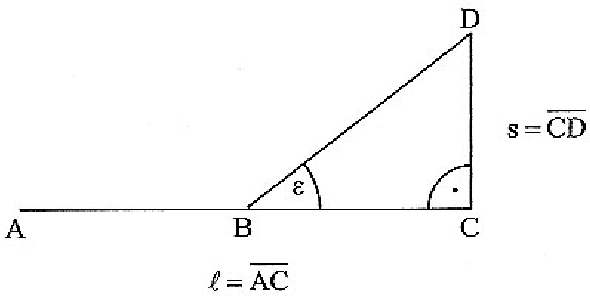
10.0 Eine Rinne soll aus drei gleichen Brettern bestehen und ihr Querschnitt die symmetrische Form wie in der Skizze haben. Die vorgegebene Breite jedes dieser Bretter wird mit b bezeichnet, h ist die Höhe dieser Rinne und α der Winkel, den die seitlich angebrachten Bretter mit der Waagrechten einschließen. Die von α abhängige Querschnittsfläche der Rinne wird mit $A(\alpha)$ bezeichnet. Dabei wird die Brettstärke vernachlässigt und es gilt: $0° < \alpha < 90°$ (Abitur T 2005 AII).



10.1 Bestimmen Sie $A(\alpha)$ und zeigen Sie, dass gilt: $\frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = b^2 \cdot [2 \cdot (\cos\alpha)^2 + \cos\alpha - 1]$

10.2 Ermitteln Sie unter Verwendung der Substitution $u = \cos\alpha$ den Winkel α, für den der Querschnitt und damit das Fassungsvermögen der Rinne möglichst groß werden.

11.0 Eine geradlinige Straße führt von einem Punkt A zu einem Punkt C. Vom Punkt C aus erreicht man auf kürzestem, aber unbefestigtem Weg eine Waldhütte im Punkt D.
Für die Entfernungen gelten: $l = \overline{AC}$ und $s = \overline{CD}$.
Ein Wanderer möchte in möglichst kurzer Zeit von A nach D gelangen. Zunächst wandert er ein Stück auf der Straße mit der konstanten Geschwindigkeit v_1. An einer Stelle B verlässt er dann die Straße und geht von dort auf geradlinigem Weg unter dem Winkel ε zur ursprünglichen Wegrichtung quer durchs Gelände nach D und zwar mit der konstanten Geschwindigkeit v_2 (siehe Skizze). (Abitur 2007 AII)



11.1 Zeigen Sie, dass für die von der Stelle B und dem zugehörigen Winkel ε abhängige Gesamtzeit $T(\varepsilon)$, die man für diesen Weg von A über B nach D benötigt, gilt:
$$T(\varepsilon) = \frac{l}{v_1} - \frac{s \cdot \cos\varepsilon}{v_1 \cdot \sin\varepsilon} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin\varepsilon}$$

11.2 Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion von T(ε) gilt:

$$\frac{dT(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \frac{s}{v_1 \cdot v_2} \cdot \frac{v_2 - v_1 \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2}$$

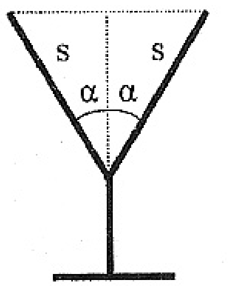
Die vorliegenden Wegstrecken bzw. Geschwindigkeiten betragen

$l = 7{,}1\ km,\ s = 4{,}1\ km,\ v_1 = 5{,}0\frac{km}{h}$ und $v_2 = 2{,}5\frac{km}{h}$

11.3 Berechnen Sie jeweils, wie lange die Wanderung von A nach D dauern würde, wenn der Wanderer die Straße schon im Punkt A bzw. erst im Punkt C verlassen würde.

11.4 Bestimmen Sie, für welchen Winkel ε_0 die Zeit T(ε) ihren absolut kleinsten Wert annimmt und berechnen Sie T(ε_0).

12.0 Der Kelch eines Eisbechers soll die Form eines auf der Spitze stehenden geraden Kreiskegels erhalten (siehe Skizze). Das vorgegebene Innenmaß der Mantellinie wird mit s und der „halbe" Öffnungswinkel mit α bezeichnet.



Für α gilt 0° < α < 90° (Abitur 2008 AII).

12.1 Stellen Sie die Volumenmaßzahl V(α) des Kelchs in Abhängigkeit von α dar.

(Mögliches Ergebnis: $V(\alpha) = \frac{\pi}{3} \cdot s^3 \cdot (\sin\alpha)^2 \cdot \cos\alpha$)

12.2 Bestimmen Sie ohne Verwendung der zweiten Ableitung den Winkel α so, dass der Kelch das größtmögliche Volumen besitzt.

13.0 Mit Hilfe einer Konvexlinse (Sammellinse) wird von einem selbstleuchtenden, links von der Linse stehenden Gegenstand auf einem Schirm rechts von der Linse ein reales, scharfes Bild erzeugt. Der Abstand des Gegenstands von der Linsenmitte heißt dabei Gegenstandsweite g, der Abstand des Schirms von der Linsenmitte heißt Bildweite b. Der Zusammenhang zwischen diesen Größen ist durch die Linsenformel $\frac{1}{g} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}$ gegeben, wobei mit f die Brennweite der Linse bezeichnet wird. Um ein reales Bild zu erzeugen, muss die Gegenstandsweite größer als die Brennweite sein.
Der Versuchsaufbau soll in einem Schaukasten einer Schule gezeigt werden. Die Brennweite der verwendeten Linse beträgt f = 50 mm. Die Einheit kann für die Berechnungen weggelassen werden. (Abitur 2011 AII)

13.1 Zeigen Sie, dass für den gesamten Platzbedarf a = g + b in Abhängigkeit von der Gegenstandsweite g folgender funktionaler Zusammenhang besteht: $a(g) = \frac{g^2}{g-50}$.

13.2 Bestimmen Sie eine geeignete Definitionsmenge D_a, wenn der Platzbedarf a durch die Länge des Schaukastens mit 3000 mm begrenzt ist.

13.3 Beweisen Sie, dass es eine Gegenstandsweite g_0 gibt, für die der Platzbedarf a minimal wird, berechnen Sie g_0 sowie den minimalen Platzbedarf $a(g_0)$ und ermitteln Sie, welcher besondere Zusammenhang zwischen g_0 und der zugehörigen Bildweite b_0 besteht.

Lösungen

1. $V_{Quader} = a^2 \cdot b$

   $Umriss\ des\ Quaders = 8a + 4b = 72 \qquad \Rightarrow b = 18 - 2a$

   $\Rightarrow V = a^2 \cdot (18 - 2a) = 18a^2 - 2a^3 \qquad a \in \,]0;9[$

   Bestimmung des maximalen Volumens:

$$\frac{dV(a)}{da} = 36a - 6a^2 \Rightarrow 36a - 6a^2 = 0 \quad \Rightarrow 6a(6-a) = 0 \quad \Rightarrow a = 0 \ \ und \ \ a = 6$$

$$\frac{d^2V(a)}{da^2} = 36 - 12a \quad \Rightarrow \frac{d^2V}{d^2a}(0) > 0 \ \ \text{und} \ \ \frac{d^2V}{d^2a}(6) < 0$$

   $\Rightarrow$ Maximum für a = 6
   Die Funktion V(a) hat im Bereich]0;9[nur einen relativen Hochpunkt, also tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ a = 6 ist absolutes Maximum;
   Der Quader hat die Kanten a = 6 cm und b = 6 cm und sein Volumen beträgt 216 cm^3.

2. $V_{Quader}(a) = (32 - 2a) \cdot (20 - 2a) \cdot a = (640 - 40a - 64a + 4a^2) \cdot a$

   $= 4a^3 - 104a^2 + 640a \qquad a \in \,]0;10[$

   Bestimmung des maximalen Volumens:

$$\frac{dV(a)}{da} = 12a^2 - 208a + 640 \quad \Rightarrow 12a^2 - 208a + 640 = 0 \ \Rightarrow a = 4 \ \ und \ \ a = 13\frac{1}{3}$$

$$\frac{d^2V(a)}{da^2} = 24a - 208 \quad \Rightarrow \frac{d^2V}{d^2a}(4) < 0$$

   $\Rightarrow$Maximum für a = 4
   Die Funktion V(a) hat im Bereich]0;10[nur einen relativen Hochpunkt, also tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ a = 4 ist absolutes Maximum;
   Die Seitenlänge der herausgeschnittenen Quadrate beträgt 4 cm und das maximale Volumen beträgt $(32 - 2 \cdot 4) \cdot (20 - 2 \cdot 4) \cdot 4\ cm^3 = 1152\,cm^3$

3. $A = a \cdot b$

Mit dem Satz von Pythagoras (im rechtwinkligen Teildreieck) folgt:

$$b = \sqrt{(2r)^2 - a^2} = \sqrt{4r^2 - a^2}$$

$$A(a) = a \cdot \sqrt{4r^2 - a^2} \qquad (A(a))^2 = g(a) = a^2 \cdot (4r^2 - a^2)$$

$$\Rightarrow mit\ r = 5:\ g(A) = 100a^2 - a^4 \qquad D_g = \left]0;10\right[$$

$$\frac{dg(a)}{da} = 200a - 4a^3 \qquad \Rightarrow 200a - 4a^3 = 0 \qquad \Rightarrow 4a(50 - a^2) = 0$$

$$\Rightarrow a_1 = 0 \quad a_2 = \sqrt{50} \quad a_3 = -\sqrt{50}$$

a_1 und a_3 sind nicht im Definitionsbereich

$$\frac{d^2g(a)}{da^2} = 200 - 12a^2 \qquad \Rightarrow \frac{d^2g}{d^2a}(\sqrt{50}) = 200 - 12 \cdot 50 = -400 < 0$$

$$\Rightarrow \text{Maximum für } a = \sqrt{50}$$

Die Funktion g(a) hat im Definitionsbereich nur ein Extrema (Hochpunkt), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum für g(a) und damit auch für A(a).

Absolut größter Flächeninhalt: $A(\sqrt{50}) = \sqrt{50} \cdot \sqrt{100 - 50} = 50$

Geometrische Interpretation:

Das Rechteck mit der absolut größten Flächenmaßzahl 50 ist ein Quadrat mit der Seitenlänge $\sqrt{50}$.

4.1 Volumenmaßzahl V des Zylinders: $V = r^2 \cdot \pi \cdot h$

Mit dem Satz von Pythagoras ergibt sich:

$$(2r)^2 + h^2 = 12^2 \quad \Rightarrow 4r^2 = 144 - h^2 \quad \Rightarrow r^2 = 36 - \frac{h^2}{4}$$

$$\Rightarrow V(h) = (36 - \frac{h^2}{4}) \cdot \pi \cdot h = (-\frac{h^3}{4} + 36h) \cdot \pi$$

Definitionsmenge: V(h) muss größer Null sein

$$(-\frac{h^3}{4} + 36h) \cdot \pi > 0 \quad \Rightarrow \frac{h}{4}(-h^2 + 144) > 0$$

$$\Rightarrow h > 0 \quad und \quad -h^2 + 144 > 0 \quad \Rightarrow h^2 < 144 \quad \Rightarrow |h| < 12 \quad \Rightarrow -12 < h < 12$$

$$wegen\ h > 0\ gilt:\ D_V = \left]0;12\right[$$

4.2

$$\frac{dV(h)}{dh} = (-\frac{3}{4}h^2 + 36) \cdot \pi \quad \Rightarrow (-\frac{3}{4}h^2 + 36) \cdot \pi = 0 \quad \Rightarrow (-\frac{3}{4}h^2 + 36) = 0$$

$$\Rightarrow h^2 = 48 \quad \Rightarrow h_1 = \sqrt{48} = 4\sqrt{3} \qquad h_2 = -\sqrt{48} = -4\sqrt{3}$$

h_2 ist nicht im Definitionsbereich

$$\frac{d^2V(h)}{dh^2}=-\frac{6}{4}h\cdot\pi \qquad \Rightarrow \frac{d^2V}{d^2h}(4\sqrt{3})=-\frac{6}{4}\cdot 4\sqrt{3}\cdot\pi<0$$

$\Rightarrow$ Maximum für $h=4\sqrt{3}$

Die Funktion V(h) hat im Definitionsbereich nur einen Extrempunkt (Maximum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

Berechnung des größten Volumens:

$$V(4\sqrt{3})=(-\frac{(4\sqrt{3})^3}{4}+36\cdot 4\sqrt{3})\cdot\pi=96\sqrt{3}\cdot\pi\approx 522{,}37$$

Für den zugehörigen Radius gilt:

$$r^2=36-\frac{(4\sqrt{3})^2}{4}=36-\frac{48}{4}=36-12=24 \quad \Rightarrow r=\pm\sqrt{24}$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$$

5. $V_{Kegel}=\frac{1}{3}(r^2\pi)\cdot h$

Mit dem Satz des Pythagoras ergibt sich: $r^2+h^2=s^2$

Mit s = 12 folgt $r^2=144-h^2$

$$\Rightarrow V(h)=\frac{1}{3}\pi(144-h^2)\cdot h=\frac{1}{3}\pi(-h^3+144h)$$

Definitionsmenge: V(h) muss größer 0 sein

$$-h^2+144>0 \quad \Rightarrow h^2>144 \quad \Rightarrow |h|<12 \quad \Rightarrow -12<h<12$$

$$\Rightarrow D_V=\left]0;12\right[\ (da\ h>0)$$

$$\frac{dV(h)}{dh}=\frac{1}{3}\pi(-3h^2+144) \quad \Rightarrow \frac{1}{3}\pi(-3h^2+144)=0 \quad \Rightarrow -3h^2+144=0$$

$$\Rightarrow h^2=48 \quad \Rightarrow |h|=\sqrt{48}=4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow h_1=4\sqrt{3} \qquad h_2=-4\sqrt{3} \quad (\notin D_V)$$

$$\frac{d^2V(h)}{dh^2}=\frac{1}{3}\pi(-6h) \qquad \Rightarrow \frac{d^2V}{d^2h}(4\sqrt{3})=\frac{1}{3}\pi(-6\cdot 4\sqrt{3})<0$$

$\Rightarrow$ Maximum für $h=4\sqrt{3}$

Die Funktion V(h) hat im Definitionsbereich nur einen Extrempunkt (Maximum), somit tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens im angegebenen Bereich auf und damit ist das relative Maximum auch das absolute Maximum.

$$Es\ gilt: r_1^2=144-h_1^2 \quad \Rightarrow r_1^2=144-48=96 \quad \Rightarrow r_1=\sqrt{96}=4\sqrt{6}$$

$$r_2=-4\sqrt{6}\ nicht\ möglich, da\ r>0)$$

Verhältnis: $\frac{r_1}{h_1} = \frac{4\sqrt{6}}{4\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$

6.1

$$A = 2\cdot 4r\cdot h + 2\cdot 2r\cdot h + r^2\pi + r\pi\cdot 4r = 12rh + 5r^2\pi$$

$$V = V_{Quader} + V_{Halbzylinder} = 4r\cdot 2r\cdot h + \frac{1}{2}\cdot r^2\pi\cdot 4r = 8r^2h + 2r^3\pi$$

$$V = 8r^2h + 2r^3\pi \quad \Rightarrow 8r^2h = V - 2r^3\pi \quad \Rightarrow h = \frac{V-2r^3\pi}{8r^2}$$

$$\Rightarrow A(r) = 12r\cdot\frac{V-2r^3\pi}{8r^2} + 5r^2\pi = \frac{3V-6r^3\pi}{2r} + 5r^2\pi = \frac{3V}{2r} - 3r^2\pi + 5r^2\pi = \frac{3V}{2r} + 2r^2\pi$$

6.2

$$V = 300 \quad \Rightarrow A(r) = \frac{900}{2r} + 2r^2\pi = \frac{450}{r} + 2r^2\pi$$

$$\frac{dA(r)}{dr} = -\frac{450}{r^2} + 4r\pi$$

$$\Rightarrow -\frac{450}{r^2} + 4r\pi = 0 \quad \Rightarrow -450 + 4r^3\pi = 0 \quad \Rightarrow r^3 = \frac{225}{2\pi} \quad \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}} \approx 3{,}3$$

Art des Extremums:

$$\frac{d^2A(r)}{dr^2} = \frac{900}{r^3} + 4\pi \qquad \Rightarrow \frac{d^2A(r)}{dr^2}\Big|_{r=\sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}} > 0 \quad \Rightarrow \text{relatives Minimum für } r = \sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}$$

Da A(r) nur einen relativen Extremwert (Minimum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf und damit ist $r = \sqrt[3]{\frac{225}{2\pi}}$ absolutes Minimum.

7.1

$$A = A_{Sechseck} + 6\cdot A_{Rechteck} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6\cdot a\cdot h \text{ (}A_{Sechseck}\text{ siehe Formelsammlung)}$$

$$V = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3}\cdot h \quad \Rightarrow h = \frac{2V}{3\sqrt{3}\cdot a^2}$$

$$\Rightarrow A(a) = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + 6\cdot a\cdot\frac{2V}{3\sqrt{3}\cdot a^2} = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{4V}{\sqrt{3}\cdot a}$$

$$\Rightarrow A(a) = \frac{3}{2}a^2\sqrt{3} + \frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a} \quad \text{mit } a > 0 \text{ (100 Liter} = 100\text{dm}^3 = 100000\text{cm}^3\text{)}$$

7.2

$$\frac{dA(a)}{da}=3\sqrt{3}\cdot a-\frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a^2}$$

$$\Rightarrow 3\sqrt{3}\cdot a-\frac{400000}{\sqrt{3}\cdot a^2}=0 \quad \Rightarrow 9a^3-400000=0 \quad \Rightarrow a=\sqrt[3]{\frac{400000}{9}}\approx 35{,}4$$

Art des Extremums:

$$\frac{d^2A(a)}{da^2}=3\sqrt{3}+\frac{800000}{\sqrt{3}\cdot a^3}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2A(a)}{da^2}\right|_{a=\sqrt[3]{\frac{400000}{9}}}>0 \quad \Rightarrow \mathit{Minimum\ \ f\ddot{u}r}\ \ a=\sqrt[3]{\frac{400000}{9}}$$

Da A(a) nur einen relativen Extremwert (Minimum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf und damit ist $a=\sqrt[3]{\frac{400000}{9}}$ absolutes Minimum.

8.1

$$O=r^2\pi+2r\pi h$$

$$V=r^2\pi h \quad \Rightarrow h=\frac{V}{r^2\pi}$$

$$\Rightarrow O(r)=r^2\pi+2r\pi\cdot\frac{V}{r^2\pi}=r^2\pi+\frac{2V}{r} \qquad D_O: r>0$$

8.2

$$\frac{dO(r)}{dr}=2r\pi-\frac{2V}{r^2}$$

$$\Rightarrow 2r\pi-\frac{2V}{r^2}=0 \quad \Rightarrow 2r^3\pi-2V=0 \quad \Rightarrow r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Art des Extremums:

$$\frac{d^2O(r)}{dr^2}=2\pi+\frac{4V}{r^3}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{d^2O(r)}{dr^2}\right|_{r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}}>0 \quad \Rightarrow \text{relatives Minimum für } r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$$

Da O(r) nur einen relativen Extremwert (Minimum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf und damit ist $r=\sqrt[3]{\frac{V}{\pi}}$ absolutes Minimum.

8.3

$$r_0=r=\sqrt[3]{\frac{100}{\pi}}=3{,}17\,dm=317\,mm$$

$$h=\frac{V}{r_0^{\,2}\pi}=\frac{100}{(3{,}17)^2\cdot\pi}=3{,}17\,dm=317\,mm$$

9.1

$$F=(4a+1)\cdot(h+2\cdot 0{,}5a+2\cdot 1)=(4a+1)\cdot(h+a+2)$$

$$V=a^2\cdot h \quad \Rightarrow h=\frac{V}{a^2}=\frac{1000}{a^2}$$

$$\Rightarrow F(a)=(4a+1)\cdot(\frac{1000}{a^2}+a+2)=\frac{4000}{a}+4a^2+8a+\frac{1000}{a^2}+a+2=$$

$$4a^2+9a+2+\frac{4000}{a}+\frac{1000}{a^2} \text{ mit } a\in R \wedge a>0$$

9.2

$$\frac{dF(a)}{da}=8a+9-\frac{4000}{a^2}-\frac{2000}{a^3}$$

$$\Rightarrow 8a+9-\frac{4000}{a^2}-\frac{2000}{a^3}=0 \quad \Rightarrow 8a^4+9a^3-4000a-2000=0$$

9.3

$$\frac{dF(a)}{da}=0 \quad \Rightarrow a\approx 7{,}75 \text{ einziges Extremum nach Voraussetzung}$$

Art des Extremums:

$$\frac{d^2F(a)}{da^2}=8+\frac{8000}{a^3}+\frac{6000}{a^4}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2F(a)}{da^2}\Big|a=7{,}75>0 \quad \Rightarrow \text{relatives Minimum für } a=7{,}75$$

Da F(a) nur einen relativen Extremwert (Minimum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf und damit ist $a=7{,}75$ absolutes Minimum.

$$\Rightarrow h=\frac{1000}{(7{,}75)^2}\approx 16{,}65$$

Abmessungen des Kartons: $l=4\cdot 7{,}75+1=32\text{cm}$ $\quad b=16{,}65+7{,}75+2=26{,}4\text{cm}$

10.1

$$A_{Trapez}=\frac{a+c}{2}\cdot h \quad a=b \quad c=b+2\cdot b\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow A(\alpha)=\frac{b+b+2b\cos\alpha}{2}\cdot h=(b+b\cos\alpha)\cdot b\sin\alpha=b^2(1+\cos\alpha)\cdot\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \frac{dA(\alpha)}{d\alpha}=b^2\cdot\left[-\sin\alpha\cdot\sin\alpha+(1+\cos\alpha)\cdot\cos\alpha\right]=b^2\cdot\left[-(\sin\alpha)^2+\cos\alpha+(\cos\alpha)^2\right]$$

mit $(\sin\alpha)^2+(\cos\alpha)^2=1$ folgt: $-(\sin\alpha)^2=(\cos\alpha)^2-1$

$$\Rightarrow \frac{dA(\alpha)}{d\alpha}=b^2\cdot\left[(\cos\alpha)^2-1+\cos\alpha+(\cos\alpha)^2\right]=b^2\cdot\left[2(\cos\alpha)^2+\cos\alpha-1\right]$$

10.2

$$\Rightarrow \frac{dA(\alpha)}{d\alpha} = b^2 \cdot \left[2(\cos\alpha)^2 + \cos\alpha - 1\right] = 0 \quad \Rightarrow 2(\cos\alpha)^2 + \cos\alpha - 1 = 0$$

Substitution: $\mathrm{u} = \cos\alpha$

$$\Rightarrow 2u^2 + u - 1 = 0 \quad \Rightarrow u_1 = \frac{1}{2} \qquad u_2 = -1$$

Resubstitution: 1) $\cos\alpha = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \alpha = 60° \qquad (\alpha = 300°) \notin D_A$

2) $\cos\alpha = -1 \quad \Rightarrow (\alpha = 180°) \notin D_A$

Art des Extremums:

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathrm{A}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2} = b^2 \cdot \left[4\cos\alpha \cdot (-\sin\alpha) - \sin\alpha\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\mathrm{A}(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha^2}\Big|\alpha = 60° < 0 \quad \Rightarrow \text{relatives Maximum für } \alpha = 60°$$

Da $\mathrm{A}(\alpha)$ in $\mathrm{D_A}$ nur ein relatives Extremum (Maximum) hat, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf und somit ist $\alpha = 60°$ absolutes Maximum

11.1

Es gilt: $\mathrm{v} = \frac{\Delta \mathrm{s}}{\Delta \mathrm{t}} \quad \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta s}{v}$

$$T(\varepsilon) = \frac{\overline{AB}}{v_1} + \frac{\overline{BD}}{v_2} = \frac{l - \overline{BC}}{v_1} + \frac{\overline{BD}}{v_2} = \frac{l}{v_1} - \frac{\overline{BC}}{v_1} + \frac{\overline{BD}}{v_2}$$

$$s = \overline{BD} \cdot \sin\varepsilon \quad \Rightarrow \overline{BD} = \frac{s}{\sin\varepsilon}$$

$$\overline{BC} = \overline{BD} \cdot \cos\varepsilon = \frac{s}{\sin\varepsilon} \cdot \cos\varepsilon = \frac{s \cdot \cos\varepsilon}{\sin\varepsilon}$$

$$\Rightarrow T(\varepsilon) = \frac{l}{v_1} - \frac{s \cdot \cos\varepsilon}{v_1 \cdot \sin\varepsilon} + \frac{s}{v_2 \cdot \sin\varepsilon}$$

11.2

$$\frac{dT(\varepsilon)}{d\varepsilon} = 0 - \frac{s}{v_1} \cdot \frac{-\sin\varepsilon \cdot \sin\varepsilon - \cos\varepsilon \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2} + \frac{s}{v_2} \cdot \frac{0 - 1 \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2} =$$

$$= \frac{s}{v_1} \cdot \frac{(\sin\varepsilon)^2 + (\cos\varepsilon)^2}{(\sin\varepsilon)^2} - \frac{s}{v_2} \cdot \frac{\cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2} = \frac{s}{v_1} \cdot \frac{1}{(\sin\varepsilon)^2} - \frac{s}{v_2} \cdot \frac{\cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2} =$$

$$= \frac{s \cdot v_2 - s \cdot v_1 \cdot \cos\varepsilon}{v_1 \cdot v_2 \cdot (\sin\varepsilon)^2} = \frac{s}{v_1 \cdot v_2} \cdot \frac{v_2 - v_1 \cdot \cos\varepsilon}{(\sin\varepsilon)^2}$$

11.3

$$T_A = \frac{\overline{AD}}{v_2} = \frac{\sqrt{l^2 + s^2}}{v_2} = \frac{\sqrt{(7{,}1)^2 + (4{,}1)^2}}{2{,}5} \approx 3{,}3h$$

$$T_C = \frac{l}{v_1} + \frac{s}{v_2} = \frac{7{,}1}{5{,}0} + \frac{4{,}1}{2{,}5} \approx 3{,}1h$$

11.4

$$\frac{dT(\varepsilon)}{d\varepsilon}=0 \;\Rightarrow v_2 - v_1\cdot\cos\varepsilon = 0 \;\Rightarrow \cos\varepsilon=\frac{v_2}{v_1}=\frac{2,5}{5,0}=\frac{1}{2} \;\Rightarrow \varepsilon = 60°$$

$$T(60°)=\frac{7,1}{5,0}-\frac{4,1\cdot\cos 60°}{5,0\cdot\sin 60°}+\frac{4,1}{2,5\cdot\sin 60°}\approx 2,8h$$

$T_A \approx 3{,}3\text{h} \quad T(90°)\approx 3{,}1\text{h}$

Da die Funktion T(ε) im Bereich [$\varepsilon_{\min}$;90°] ($\varepsilon_{\min}$ ist wegen s < l kleiner als 60°) nur ein Extremum hat, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ ε=60° ist absolutes Minimum

12.1

$$V_{Kegel}=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot h$$

$$\sin\alpha=\frac{r}{s} \quad\Rightarrow r=s\cdot\sin\alpha \qquad \cos\alpha=\frac{h}{s} \quad\Rightarrow h=s\cdot\cos\alpha$$

$$\Rightarrow V(\alpha)=\frac{1}{3}\cdot(s\cdot\sin\alpha)^2\cdot\pi\cdot(s\cdot\cos\alpha)=\frac{\pi}{3}\cdot s^3\cdot(\sin\alpha)^2\cdot(\cos\alpha)$$

12.2

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha}=\frac{\pi}{3}\cdot s^3\cdot[2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos\alpha+(\sin\alpha)^2\cdot(-\sin\alpha)]=$$

$$\frac{\pi}{3}\cdot s^3\cdot\sin\alpha\cdot[2(\cos\alpha)^2-(\sin\alpha)^2]=\frac{\pi}{3}\cdot s^3\cdot\sin\alpha\cdot[2(\cos\alpha)^2-(1-(\cos\alpha)^2)]=$$

$$\frac{\pi}{3}\cdot s^3\cdot\sin\alpha\cdot[3(\cos\alpha)^2-1]$$

$$\frac{dV(\alpha)}{d\alpha}=0 \quad\Rightarrow 3(\cos\alpha)^2-1=0 \qquad \sin\alpha\neq 0,\text{weil } 0°<\alpha<90°$$

$$\Rightarrow(\cos\alpha)^2=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\cos\alpha=\pm\frac{\sqrt{3}}{3} \qquad\Rightarrow\alpha\approx 54{,}74° \quad \text{wegen } 0°<\alpha<90°$$

Skizze von $\frac{dV(\alpha)}{d\alpha}$: $\frac{\pi}{3}\cdot s^3\cdot\sin\alpha$ positiv für $0°<\alpha<90°$

Skizze von $3(\cos\alpha)^3-1$:

$\Rightarrow \alpha=54{,}74°$ ist Maximum

Da V(α) im Bereich $0°<\alpha<90°$ nur ein Extremum (Maximum) besitzt, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf $\Rightarrow$ absolutes Maximum für $\alpha=54{,}74°$

13.1

$$\frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f} \quad \Rightarrow \frac{1}{g}+\frac{1}{b}=\frac{1}{50} \quad \Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{1}{50}-\frac{1}{g}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{b}=\frac{g-50}{50\cdot g} \quad \Rightarrow b=\frac{50\cdot g}{g-50}$$

$$\Rightarrow a(g)=g+\frac{50\cdot g}{g-50}=\frac{g\cdot(g-50)+50g}{g-50}=\frac{g^2-50g+50g}{g-50}=\frac{g^2}{g-50}$$

13.2

$g>50$ damit $b>0$ gilt

$$\frac{g^2}{g-50}<3000 \quad \Rightarrow g^2<3000(g-50) \quad \Rightarrow g^2-3000g+150000<0$$

$$g^2-3000g+150000=0 \quad \Rightarrow g_{1/2}=\frac{3000\pm\sqrt{9000000-600000}}{2}\approx\frac{3000\pm 2898,28}{2}$$

$$\Rightarrow g_1\approx 2949,14 \qquad g_2\approx 50,86$$

Skizze von $(g^2-3000g+150000)$:

$$\Rightarrow D_a=\left]50,86;2949,14\right[$$

13.3

$$\frac{da(g)}{dg} = \frac{2g \cdot (g-50) - g^2 \cdot 1}{(g-50)^2} = \frac{g^2 - 100g}{(g-50)^2}$$

$$\frac{da(g)}{dg} = 0 \quad \Rightarrow g^2 - 100g = 0 \quad \Rightarrow g(g-100) = 0 \quad \Rightarrow (g_1 = 0) \notin D \quad g_2 = 100$$

Skizze von $\frac{da(g)}{dg}$: Nenner immer positiv

Skizze von $(g^2 - 100g)$:

$\Rightarrow g = 100$ ist Minimum

Da a im Bereich $\left]50{,}86;2949{,}14\right[$ nur ein Extremum (Minimum) aufweist, tritt in diesem Bereich keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf

$\Rightarrow$ absolutes Minimum für $g = 100$

$$a(g_0) = a(100) = \frac{100^2}{100-50} = 200$$

$$b_0 = \frac{50 \cdot 100}{100-50} = 100 \quad \Rightarrow b_0 = g_0$$

Die Linse steht also für diesen Fall genau in der Mitte zwischen Gegenstand und Bildschirm.