

Geometrische Deutung linearer Gleichungssysteme

1. Eine lineare Gleichung mit drei Variablen

Beispiel: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

Man kann diese Gleichung auch als lineares Gleichungssystem mit einer Gleichung und drei Unbekannten interpretieren. Dieses Gleichungssystem ist also zweifach unterbestimmt. Zur Bestimmung der Lösungsmenge sind deshalb zwei Variablen frei wählbar.

$$x_2 = s \quad x_3 = t \quad \Rightarrow x_1 + s - t = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - s + t \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Parametergleichung einer Ebene.

Folgerung:

Jede lineare Gleichung der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei einer der Koeffizienten a, b, c, d verschieden von Null ist, beschreibt eine Ebene im \mathbb{R}^3 .

2. Zwei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

(I) $-x_1 - x_2 + x_3 = 1$

(II) $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

(I) $-x_1 - x_2 + x_3 = 1$

(II) $-x_2 = 4$

Man kann diese Gleichungen auch als lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten interpretieren. Dieses Gleichungssystem ist also einfach unterbestimmt. Zur Bestimmung der Lösung ist deshalb eine Variable frei wählbar.

$$x_2 = -4 \quad x_3 = s \quad \Rightarrow -x_1 + 4 + s = 1 \Rightarrow x_1 = 3 + s \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden.

Folgerung:

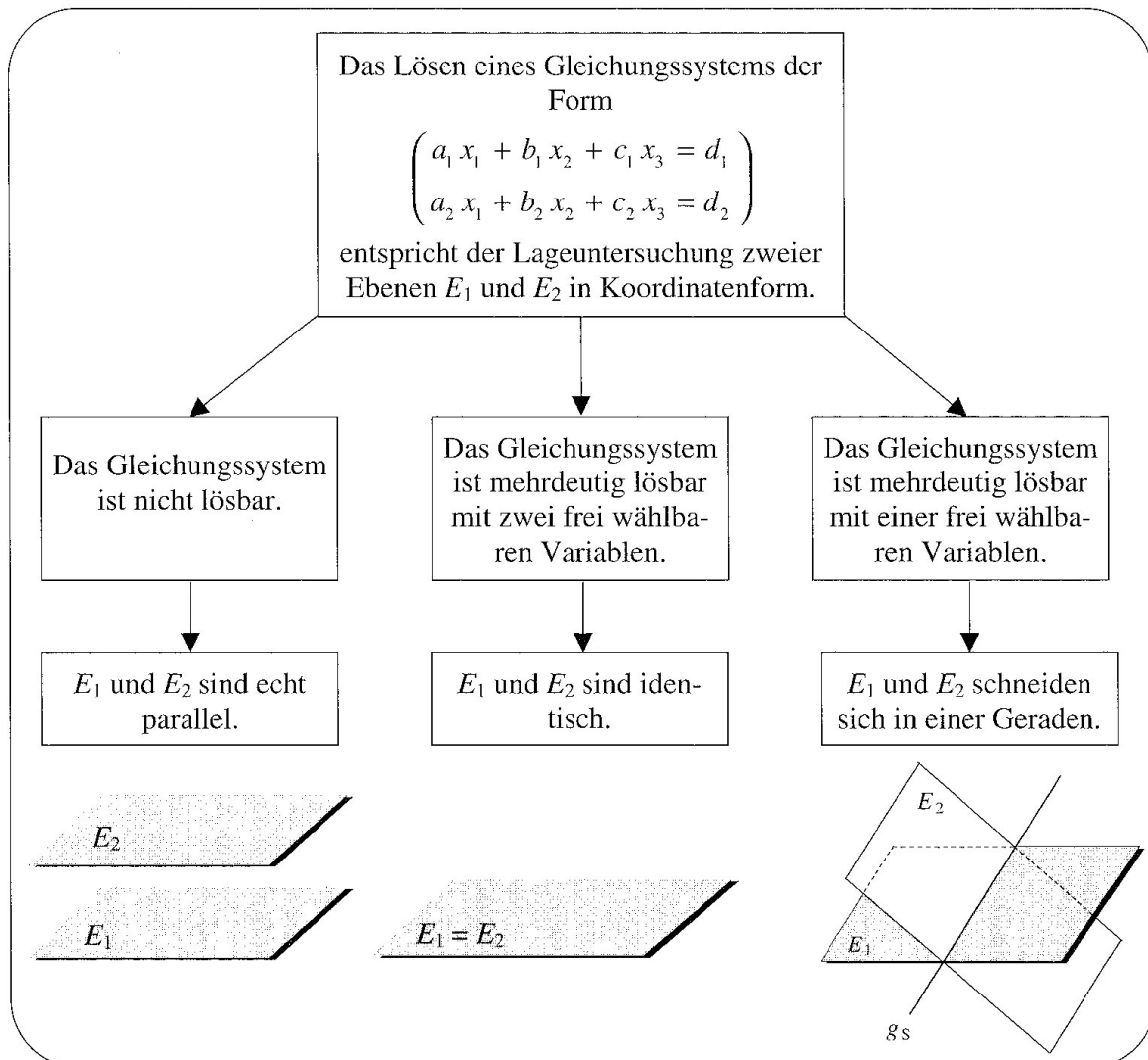
Die Frage nach der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems der Form

(I) $a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1$

(II) $a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$

entspricht also der Untersuchung der Lagebeziehung der beiden Ebenen

$E_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - d_1 = 0$ und $E_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - d_2 = 0$



3. Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$(II) \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$$

$$(III) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$(II) \quad -2x_2 - 5x_3 = -10$$

$$(III) \quad 11x_3 = 22$$

Als Lösung ergibt sich dann: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Folgerung:

Die Frage nach der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems der Form

$$(I) \quad a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1$$

$$(II) \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

$$(III) \quad a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3$$

entspricht also der Untersuchung der Lagebeziehung der drei Ebenen

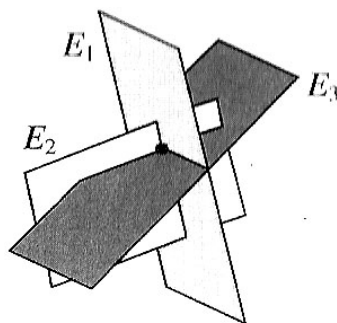
$$E_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - d_1 = 0$$

$$E_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - d_2 = 0$$

$$E_3 : a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 - d_3 = 0$$

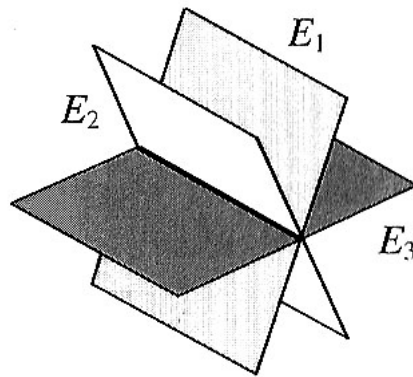
Bezüglich der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten sind folgende Fälle zu unterscheiden:

- (1) Das System ist eindeutig lösbar, d.h. die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.

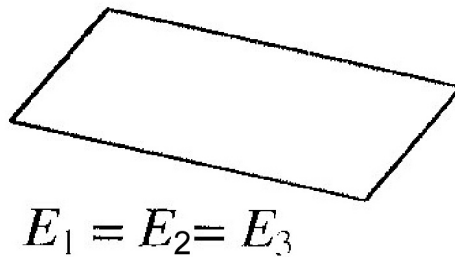


- (2) Das System ist mehrdeutig lösbar mit einer frei wählbaren Variablen (eine Nullzeile in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h. die drei Ebenen

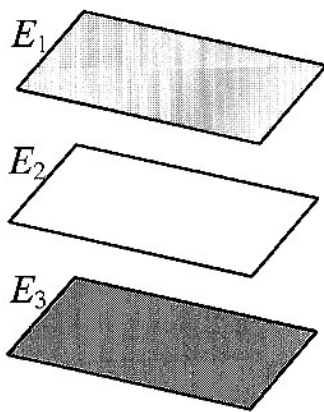
besitzen eine gemeinsame Schnittgerade.



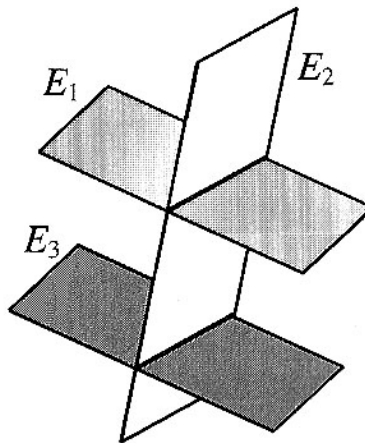
- (3) Das System ist mehrdeutig lösbar mit zwei frei wählbaren Variablen (zwei Nullzeilen in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h. die drei Ebenen sind identisch.



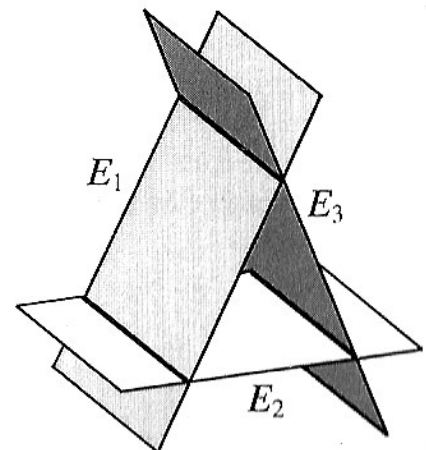
- (4) Das System ist unlösbar.



Die drei Ebenen sind parallel und verschieden.



Zwei der Ebenen sind parallel und verschieden.



Kein Ebenenpaar ist parallel. Je zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Aufgaben

1. In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$ die Ebenen G_r , H_r und K_r gegeben:

$$G_r : x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 + 19 = 0$$

$$H_r : x_1 + (r - 6) \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 7 = 0$$

$$K_r : -2 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + r \cdot x_3 - 22 = 0$$

Ermitteln Sie die Werte für r , für welche die Ebenen G_r , H_r und K_r keinen Schnittpunkt, genau einen Schnittpunkt bzw. unendlich viele Schnittpunkte haben.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem des \mathbb{R}^3 sind die Ebenen

$E: x_1 + 4x_2 + x_3 - 12 = 0$, $F: x_2 + x_3 - 11 = 0$ sowie $G_m: 3x_2 + (m - 1)x_3 + m - 37 = 0$ mit $m \in \mathbb{R}$ gegeben.

Untersuchen Sie in Abhängigkeit von m die Lagebeziehung der Ebenen E , F und G_m . (Abitur 2006 BII)

Lösungen

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 1 & r-6 & -2 & -7 \\ -2 & -14 & r & 22 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & r-23 & r-2 & 12 \\ 0 & 20 & -r & -16 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & 20 & -r & -16 \\ 0 & r-23 & r-2 & 12 \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & 20 & -r & -16 \\ 0 & 0 & r^2-3r-40 & 16r-128 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow r^2 - 3r - 40 = 0 \Rightarrow (r-8) \cdot (r+5) = 0 \Rightarrow r_1 = 8 \quad r_2 = -5$$

$$r = 8: \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \Rightarrow \text{unendlich viele Schnittpunkte}$$

$$r = -5: \quad \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -208 \end{array} \Rightarrow \text{keinen Schnittpunkt}$$

$$r \in \mathbb{R} \setminus \{-5; 8\}: \text{ genau einen Schnittpunkt}$$

2.

$$\begin{array}{l} (I) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & m-1 & 37-m \end{array} \right) \\ (II) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array} \right) \\ (III) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array} \right) \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} (I) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array} \right) \\ (II) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array} \right) \\ (III) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array} \right) \end{array}$$

$$m-4=0 \Rightarrow m=4 \Rightarrow (III) \begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

\Rightarrow für $m = 4$ hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen

\Rightarrow die drei Ebenen E , F und G_4 schneiden sich in einer Geraden

\Rightarrow für $m \neq 4$ hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung

\Rightarrow die drei Ebenen E , F und G_m schneiden sich in einem Punkt $S(-35; 12; -1)$