Geometrische Deutung linearer Gleichungssysteme

1. Eine lineare Gleichung mit drei Variablen

Beispiel: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

Man kann diese Gleichung auch als lineares Gleichungssystem mit einer Gleichung und drei Unbekannten interpretieren. Dieses Gleichungssystem ist also zweifach unterbestimmt. Zur Bestimmung der Lösungsmenge sind deshalb zwei Variablen frei wählbar.

$$x_2 = s \quad x_3 = t \quad \Rightarrow x_1 + s - t = 1 \Rightarrow x_1 = 1 - s + t \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Parametergleichung einer Ebene.

Folgerung:

Jede lineare Gleichung der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit $a,b,c,d \in R$, wobei einer der Koeffizienten a, b, c, d verschieden von Null ist, beschreibt eine Ebene im R^3.

2. Zwei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

(I) $-x_1 - x_2 + x_3 = 1$

(II) $2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

(I) $-x_1 - x_2 + x_3 = 1$

(II) $-x_2 = 4$

Man kann diese Gleichungen auch als lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten interpretieren. Dieses Gleichungssystem ist also einfach unterbestimmt. Zur Bestimmung der Lösung ist deshalb eine Variable frei wählbar.

$$x_2 = -4 \quad x_3 = s \quad \Rightarrow -x_1 + 4 + s = 1 \Rightarrow x_1 = 3 + s \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden.

Folgerung:

Die Frage nach der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystem der Form

(I) $a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1$

(II) $a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$

entspricht also der Untersuchung der Lagebeziehung der beiden Ebenen

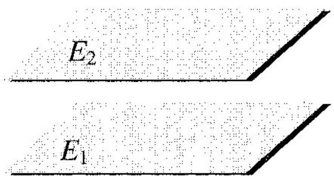
$E_1: a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - d_1 = 0$ und $E_2: a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - d_2 = 0$

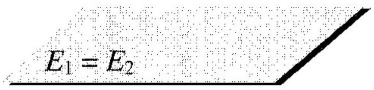
Das Lösen eines Gleichungssystems der Form

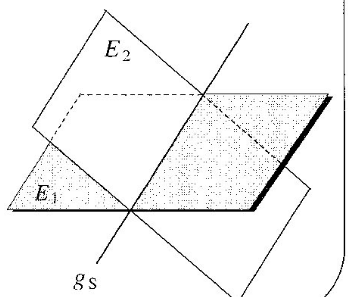
$$\begin{pmatrix} a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1 \\ a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2 \end{pmatrix}$$

entspricht der Lageuntersuchung zweier Ebenen E_1 und E_2 in Koordinatenform.

Das Gleichungssystem ist nicht lösbar.	Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar mit zwei frei wählbaren Variablen.	Das Gleichungssystem ist mehrdeutig lösbar mit einer frei wählbaren Variablen.
E_1 und E_2 sind echt parallel.	E_1 und E_2 sind identisch.	E_1 und E_2 schneiden sich in einer Geraden.







3. Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

(I) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

(II) $3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$

(III) $x_1 + x_2 + x_3 = 3$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

(I) $2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$

(II) $-2x_2 - 5x_3 = -10$

(III) $11x_3 = 22$

Als Lösung ergibt sich dann: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Folgerung:

Die Frage nach der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems der Form

(I) $a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1$

(II) $a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$

(III) $a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3$

entspricht also der Untersuchung der Lagebeziehung der drei Ebenen

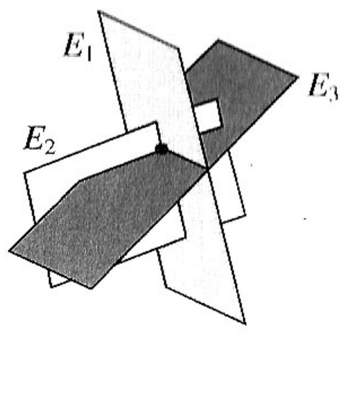
$E_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - d_1 = 0$

$E_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - d_2 = 0$

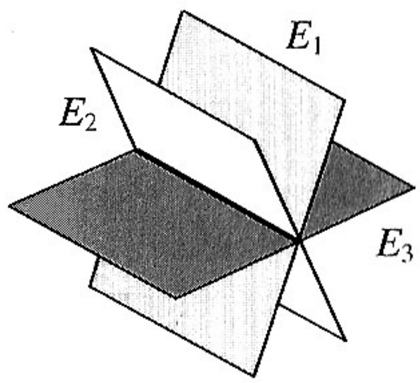
$E_3 : a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 - d_3 = 0$

Bezüglich der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten sind folgende Fälle zu unterscheiden:

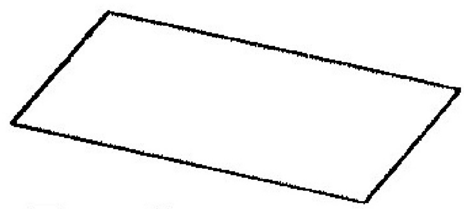
(1) Das System ist eindeutig lösbar, d.h. die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.



(2) Das System ist mehrdeutig lösbar mit einer frei wählbaren Variablen (eine Nullzeile in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h die drei Ebenen besitzen eine gemeinsame Schnittgerade.

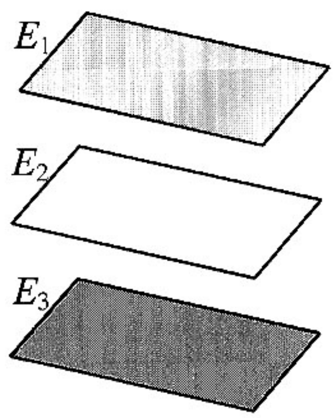


(3) Das System ist mehrdeutig lösbar mit zwei frei wählbaren Variablen (zwei Nullzeilen in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h. die drei Ebenen sind identisch.

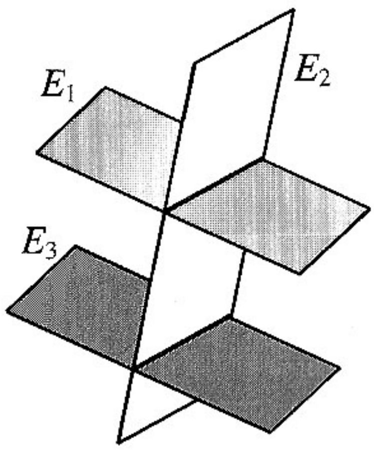


$$E_1 = E_2 = E_3$$

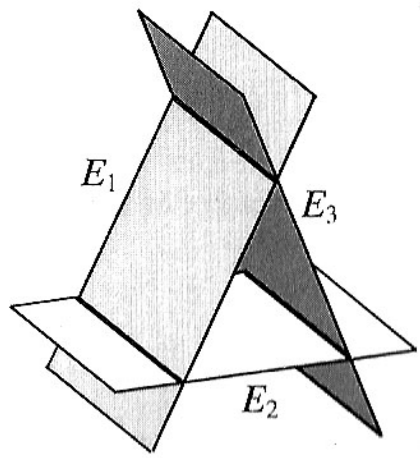
(4) Das System ist unlösbar.



Die drei Ebenen sind parallel und verschieden.



Zwei der Ebenen sind parallel und verschieden.



Kein Ebenenpaar ist parallel. Je zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden.

Aufgaben

1. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$ die Ebenen G_r, H_r und K_r gegeben:

   $G_r: x_1 + 17 \cdot x_2 - r \cdot x_3 + 19 = 0$

   $H_r: x_1 + (r-6) \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 + 7 = 0$

   $K_r: -2 \cdot x_1 - 14 \cdot x_2 + r \cdot x_3 - 22 = 0$

   Ermitteln Sie die Werte für r, für welche die Ebenen G_r, H_r und K_r keinen Schnittpunkt, genau einen Schnittpunkt bzw. unendlich viele Schnittpunkte haben.

2. In einem kartesischen Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$ sind die Ebenen
   E: $x_1 + 4x_2 + x_3 - 12 = 0$, F: $x_2 + x_3 - 11 = 0$ sowie G_m: $3x_2 + (m - 1)x_3 + m - 37 = 0$
   mit $m \in \mathbb{R}$ gegeben.
   Untersuchen Sie in Abhängigkeit von m die Lagebeziehung der Ebenen E, F und G_m. (Abitur 2006 BII)

Lösungen

1.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 1 & r-6 & -2 & -7 \\ -2 & -14 & r & 22 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & r-23 & r-2 & 12 \\ 0 & 20 & -r & -16 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & 20 & -r & -16 \\ 0 & r-23 & r-2 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 17 & -r & -19 \\ 0 & 20 & -r & -16 \\ 0 & 0 & r^2-3r-40 & 16r-128 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow r^2 - 3r - 40 = 0 \;\Rightarrow (r-8)\cdot(r+5) = 0 \;\Rightarrow r_1 = 8 \quad r_2 = -5$

$r = 8$: $\;0 \;\; 0 \;\; 0 \;|0$ $\Rightarrow$ unendlich viele Schnittpunkte

$r = -5$: $\;0 \;\; 0 \;\; 0 \;|-208$ $\Rightarrow$ keinen Schnittpunkt

$r \in \mathbb{R} \setminus \{-5;8\}$: genau einen Schnittpunkt

2.

$$\begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 3 & m-1 & 37-m \end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{c} (I) \\ (II) \\ (III) \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 0 & m-4 & 4-m \end{array}\right)$$

$m - 4 = 0 \;\Rightarrow m = 4 \;\Rightarrow$ (III) $0\;\;0\;\;0|\,0$

$\Rightarrow$ für $m = 4$ hat das lineare Gleichungssystem unendlich viele Lösungen

$\Rightarrow$ die drei Ebenen E, F und G_4 schneiden sich in einer Geraden

$\Rightarrow$ für $m \neq 4$ hat das lineare Gleichungssystem genau eine Lösung

$\Rightarrow$ die drei Ebenen E, F und G_m schneiden sich in einem Punkt S(-35;12;-1)