

Geometrische Deutung linearer Gleichungssysteme

1. Eine lineare Gleichung mit drei Variablen

Beispiel: $x_1 + x_2 - x_3 = 1$

Man kann diese Gleichung auch als lineares Gleichungssystem mit einer Gleichung und drei Unbekannten interpretieren. Dieses Gleichungssystem ist also zweifach unterbestimmt. Zur Bestimmung der Lösungsmenge sind deshalb zwei Variablen frei wählbar.

$$x_2 = s \quad x_3 = t \quad \Rightarrow x_1 + s - t = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 1 - s + t \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Parametergleichung einer Ebene.

Folgerung:

Jede lineare Gleichung der Form $ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, wobei einer der Koeffizienten a, b, c, d verschieden von Null ist, beschreibt eine Ebene im \mathbb{R}^3 .

2. Zwei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

$$(I) \quad -x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$(II) \quad 2x_1 + x_2 - 2x_3 = 2$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$$(I) \quad -x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

$$(II) \quad -x_2 = 4$$

Man kann diese Gleichungen auch als lineares Gleichungssystem mit zwei Gleichungen und drei Unbekannten interpretieren. Dieses Gleichungssystem ist also einfach unterbestimmt. Zur Bestimmung der Lösung ist deshalb eine Variable frei wählbar.

$$x_2 = -4 \quad x_3 = s \quad \Rightarrow -x_1 + 4 + s = 1 \quad \Rightarrow x_1 = 3 + s \quad \Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist die Gleichung einer Geraden.

Folgerung:

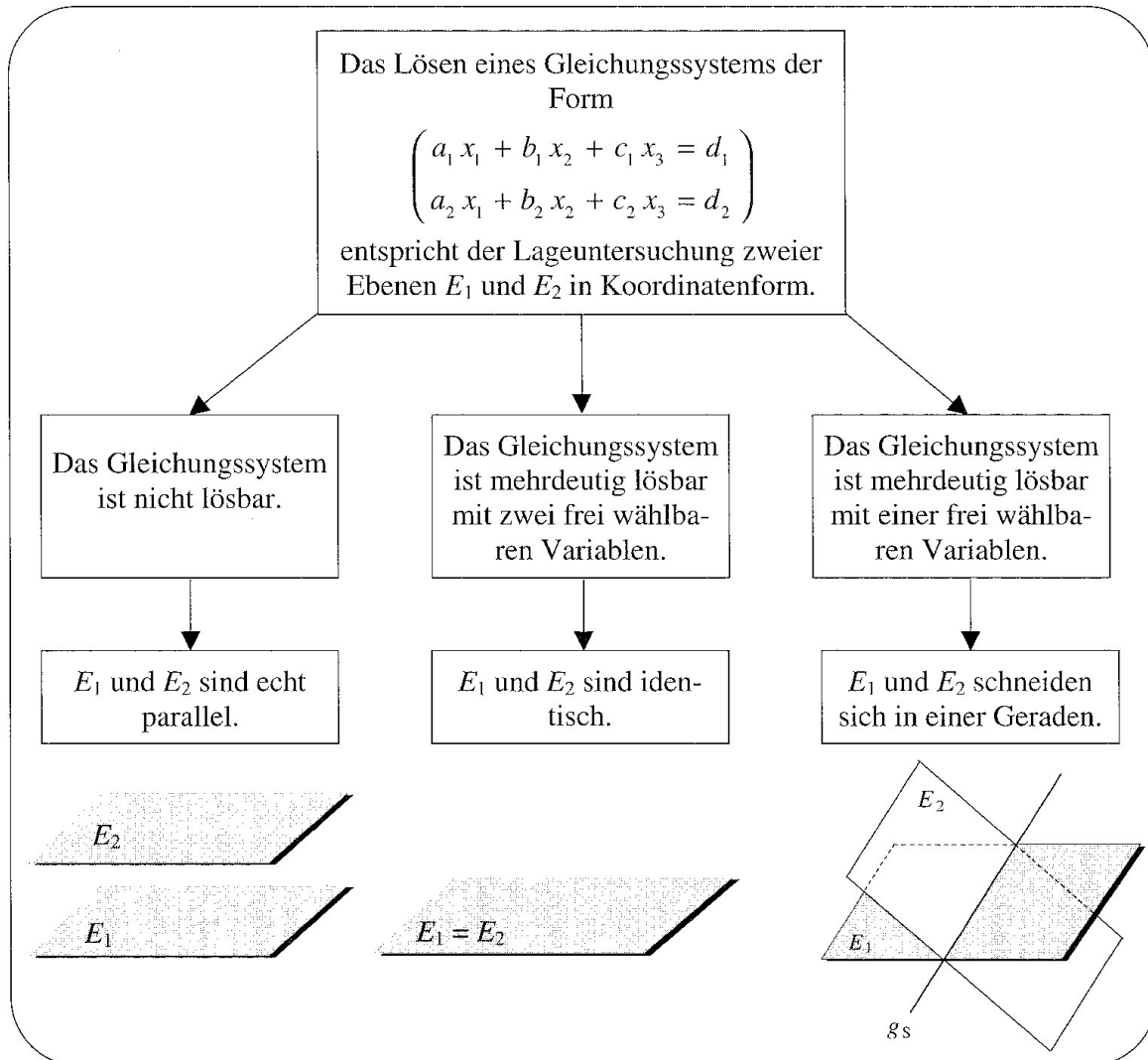
Die Frage nach der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems der Form

$$(I) \quad a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 = d_1$$

$$(II) \quad a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 = d_2$$

entspricht also der Untersuchung der Lagebeziehung der beiden Ebenen

$$E_1 : a_1 x_1 + b_1 x_2 + c_1 x_3 - d_1 = 0 \quad \text{und} \quad E_2 : a_2 x_1 + b_2 x_2 + c_2 x_3 - d_2 = 0$$



3. Drei lineare Gleichungen mit drei Variablen

Beispiel:

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$(II) \quad 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -1$$

$$(III) \quad x_1 + x_2 + x_3 = 3$$

Mit Hilfe des Gaußschen Algorithmus ergibt sich:

$$(I) \quad 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0$$

$$(II) \quad -2x_2 - 5x_3 = -10$$

$$(III) \quad 11x_3 = 22$$

Als Lösung ergibt sich dann: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Folgerung:

Die Frage nach der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems der Form

$$(I) \quad a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 = d_1$$

$$(II) \quad a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 = d_2$$

$$(III) \quad a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 = d_3$$

entspricht also der Untersuchung der Lagebeziehung der drei Ebenen

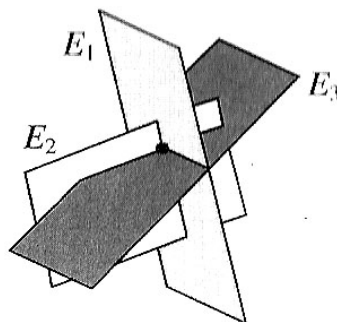
$$E_1 : a_1x_1 + b_1x_2 + c_1x_3 - d_1 = 0$$

$$E_2 : a_2x_1 + b_2x_2 + c_2x_3 - d_2 = 0$$

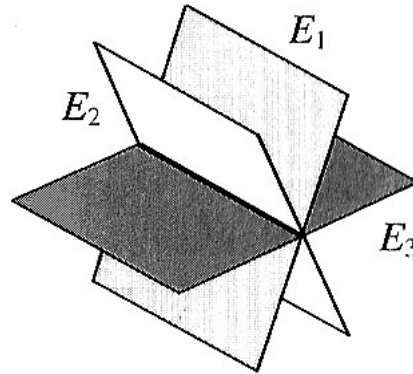
$$E_3 : a_3x_1 + b_3x_2 + c_3x_3 - d_3 = 0$$

Bezüglich der Lösbarkeit eines linearen Gleichungssystems mit drei Gleichungen und drei Unbekannten sind folgende Fälle zu unterscheiden:

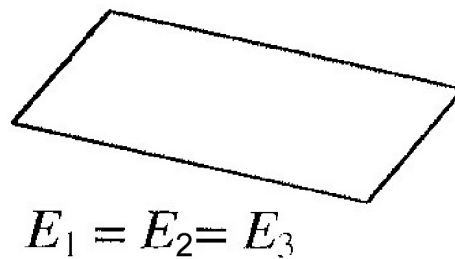
- (1) Das System ist eindeutig lösbar, d.h. die drei Ebenen schneiden sich in einem Punkt.



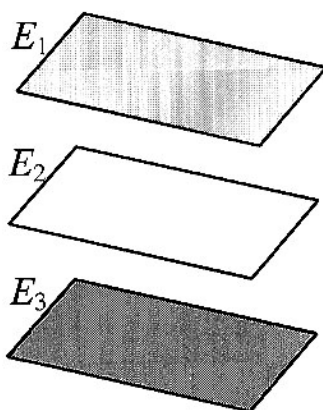
- (2) Das System ist mehrdeutig lösbar mit einer frei wählbaren Variablen (eine Nullzeile in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h. die drei Ebenen besitzen eine gemeinsame Schnittgerade.



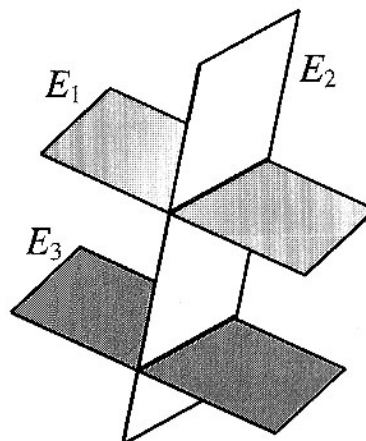
- (3) Das System ist mehrdeutig lösbar mit zwei frei wählbaren Variablen (zwei Nullzeilen in der umgeformten Koeffizientenmatrix), d.h. die drei Ebenen sind identisch.



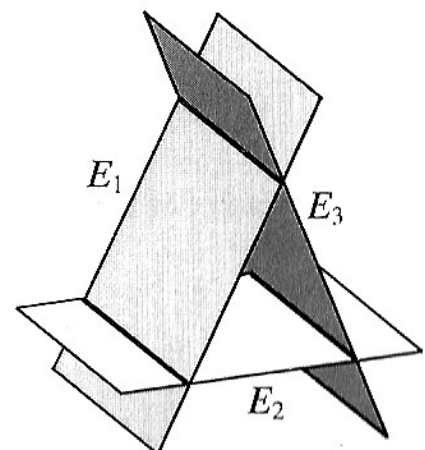
- (4) Das System ist unlösbar.



Die drei Ebenen sind parallel und verschieden.



Zwei der Ebenen sind parallel und verschieden.



Kein Ebenenpaar ist parallel. Je zwei der Ebenen schneiden sich in einer Geraden.