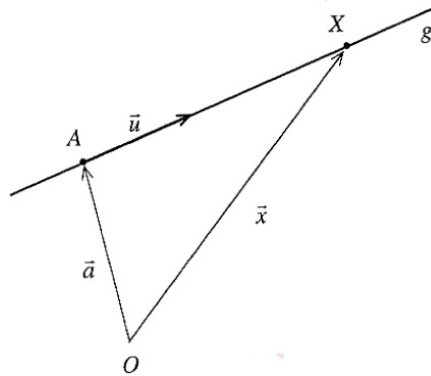


Gleichungen von Geraden

Die Flugbahn eines Flugzeugs kann durch eine Gerade g , die durch einen Punkt A und eine Richtung \vec{u} festgelegt ist, beschrieben werden (siehe Skizze).

Für jeden weiteren Punkt X der Geraden g gilt dann:

\vec{AX} ist ein Vielfaches des Richtungsvektors \vec{u} , d.h. $\vec{AX} = \lambda \cdot \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.



(1) Punkt-Richtungs-Form der Geraden:

Die Gleichung $\vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$ heißt Parametergleichung der Geraden g . Der Ortsvektor \vec{a} zum Aufhängepunkt A heißt Stützvektor, der Vektor \vec{u} Richtungsvektor der Geraden.

Schreibweise: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{u}$

(2) Zwei-Punkte-Form der Geraden:

Eine Gerade ist auch durch die Angabe zweier verschiedener Punkte A und B eindeutig festgelegt. Der Richtungsvektor der Geraden g kann z.B. durch den Vektor \vec{AB} bestimmt werden.

Schreibweise: $g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot \vec{AB}$ mit $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow g: \vec{x} = \vec{a} + \lambda \cdot (\vec{b} - \vec{a})$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Beispiel:

Stellen Sie die vektorielle Gleichung einer Geraden g auf, die durch die Punkte $A(-7/3/4)$ und $B(2/-8/5)$ festgelegt ist.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ -11 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Besondere Geraden:

(a) Ursprungsgeraden:

Einfachste Form: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \vec{u}$ zum Beispiel: $g: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Auch möglich: wähle statt (0/0/0) als Aufhängepunkt einen Punkt, der auf g liegt

zum Beispiel P(2/-4/6) $\Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Folgerung:

Bei Ursprungsgeraden sind die Koordinaten des Aufhängepunktes ein Vielfaches des Richtungsvektors.

(b) Gleichungen der Koordinatenachsen:

x_1 - Achse: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_2 - Achse: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

x_3 - Achse: $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Lage eines Punktes bezüglich einer Geraden:

Prüfen Sie, ob der Punkt P(1/-4/3) auf der Geraden $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ liegt.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \text{(I)} & 1 = 2 + k \\ \text{(II)} & -4 = -1 + 3k \\ \text{(III)} & 3 = 5 - 2k \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} k = -1 \\ k = -1 \\ k = 1 \end{matrix} \Rightarrow P \notin g$$

Aufgaben:

1. Bestimmen Sie die vektorielle Geradengleichung g , die durch die Punkte $A(-1/6/2)$ und $B(5/0/5)$ festgelegt ist und untersuchen Sie dann, ob die Punkte $P(11/-6/8)$ und $Q(5/2/5)$ auf der Geraden g liegen.
2. Prüfen Sie, ob die Punkte $A(0/1/2)$, $B(-1/0/-1)$ und $C(2/-1/0)$ auf einer Geraden liegen.
3. Prüfen Sie, ob es Zahlen $k \in \mathbb{R}$ gibt, dass die drei Punkte $A(1/2/3)$, $B(2/k/0)$ und $C(1/1/1)$ auf einer Geraden liegen.
4. Geben Sie jeweils eine Parametergleichung für die Gerade g an.
 - a) g schneidet die x_3 -Achse im Punkt $A(0/0/4)$ sowie die x_1 - x_2 -Ebene im Punkt $B(-3/3/0)$.
 - b) g geht durch $A(4/3/0)$ und ist orthogonal zu der x_1 - x_2 -Ebene.
 - c) g verläuft durch den Punkt $A(0/0/3)$ und ist parallel zur Winkelhalbierenden der x_1 - x_2 -Ebene.
- 5.0 Gegeben ist die Gerade $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$.

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind.
- 5.1 Vertauscht man den Stützvektor mit dem Richtungsvektor, so ergibt sich die gleiche Gerade.
- 5.2 Verdoppelt man den Richtungsvektor, so ergibt sich die gleiche Gerade.
- 5.3 Verdoppelt man den Stützvektor, so ergibt sich die gleiche Gerade.
- 5.4 Bildet man einen neuen Stützvektor durch Addition von Richtungsvektor und Stützvektor, so ergibt sich die gleiche Gerade.
- 5.5 Bildet man einen neuen Richtungsvektor, indem man den Stützvektor vom Richtungsvektor subtrahiert, so ergibt sich die gleiche Gerade.
- 6.0 Zur besseren Energieversorgung soll eine Gaspipeline gebaut werden. Sie verläuft gerade und verbindet eine bisherige Pipeline im Punkt $A(60/10/60)$ mit einer Stadt im Punkt $B(460/-70/20)$. Das Koordinatensystem ist so gewählt, dass die x_3 -Koordinate die Meter unter der Erdoberfläche angibt. Sowohl x_1 als auch x_2 sind in km angegeben.
- 6.1 Stellen Sie eine Parametergleichung der Punkte der Pipeline auf.
- 6.2 Die Pipeline durchläuft die Stelle mit $x_1 = 260$ und $x_2 = -30$. Das Grundwasser beginnt dort 52 Meter unter der Erde. Testen Sie, ob es beim Bau der Pipeline zu Grundwasserproblemen kommt.
- 6.3 Im Bereich der Pipeline verläuft eine Autobahn, die dort als Gerade modelliert werden kann. Die x_2 -Koordinate beträgt dabei konstant den Wert -50 . Bestimmen Sie, wie tief unter der Autobahn beim Bau der Pipeline gebohrt werden muss.

Lösungen:

1.

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 11 \\ -6 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow k = 6 \Rightarrow P \in g$$

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow Q \notin g$$

2.

Gerade durch die Punkte A und B aufstellen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Prüfen, ob C auf der Geraden g liegt:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow C \notin g$$

\Rightarrow Die Punkte A, B und C bilden ein Dreieck

3.

Gerade durch A und C aufstellen:

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ k \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{aus (I) folgt: } 2 = 1 \Rightarrow B \notin g \text{ für alle } k$$

$$4a) g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \left[\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$4b) g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$4c) g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

5.1 Falsch, da Stützvektor und Richtungsvektor nicht kollinear sind.

5.2 Richtig, da der alte und der neue Richtungsvektor zueinander kollinear sind.

5.3 Falsch, da der Punkt, den man dadurch erhält, nicht zur Geraden gehört.

5.4 Richtig, da der Punkt, den man dadurch erhält, ebenfalls zur Geraden gehört.

5.5 Falsch, da man dadurch eine andere Richtung erhält.

$$6.1 \vec{x} = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 60 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ -80 \\ -40 \end{pmatrix} \quad 0 \leq s \leq 1$$

6.2

C(260/-30/m)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 260 \\ -30 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 10 \\ 60 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 400 \\ -80 \\ -40 \end{pmatrix}$$

$$(I) \Rightarrow 260 = 60 + 400s \Rightarrow s = 0,5$$

$$(II) \Rightarrow -30 = 10 - 80s \Rightarrow s = 0,5$$

$$(III) \Rightarrow m = 60 + 0,5(-40) \Rightarrow m = 40$$

\Rightarrow Es kommt an dieser Stelle zu keinen Problemen beim Bau der Pipeline.

6.3

$$-50 = 10 + s \cdot (-80) \Rightarrow s = 0,75$$

$$(III) \Rightarrow 60 + 0,75 \cdot (-40) = 30$$

\Rightarrow Es muss also 30 m unter der Autobahn gebohrt werden.